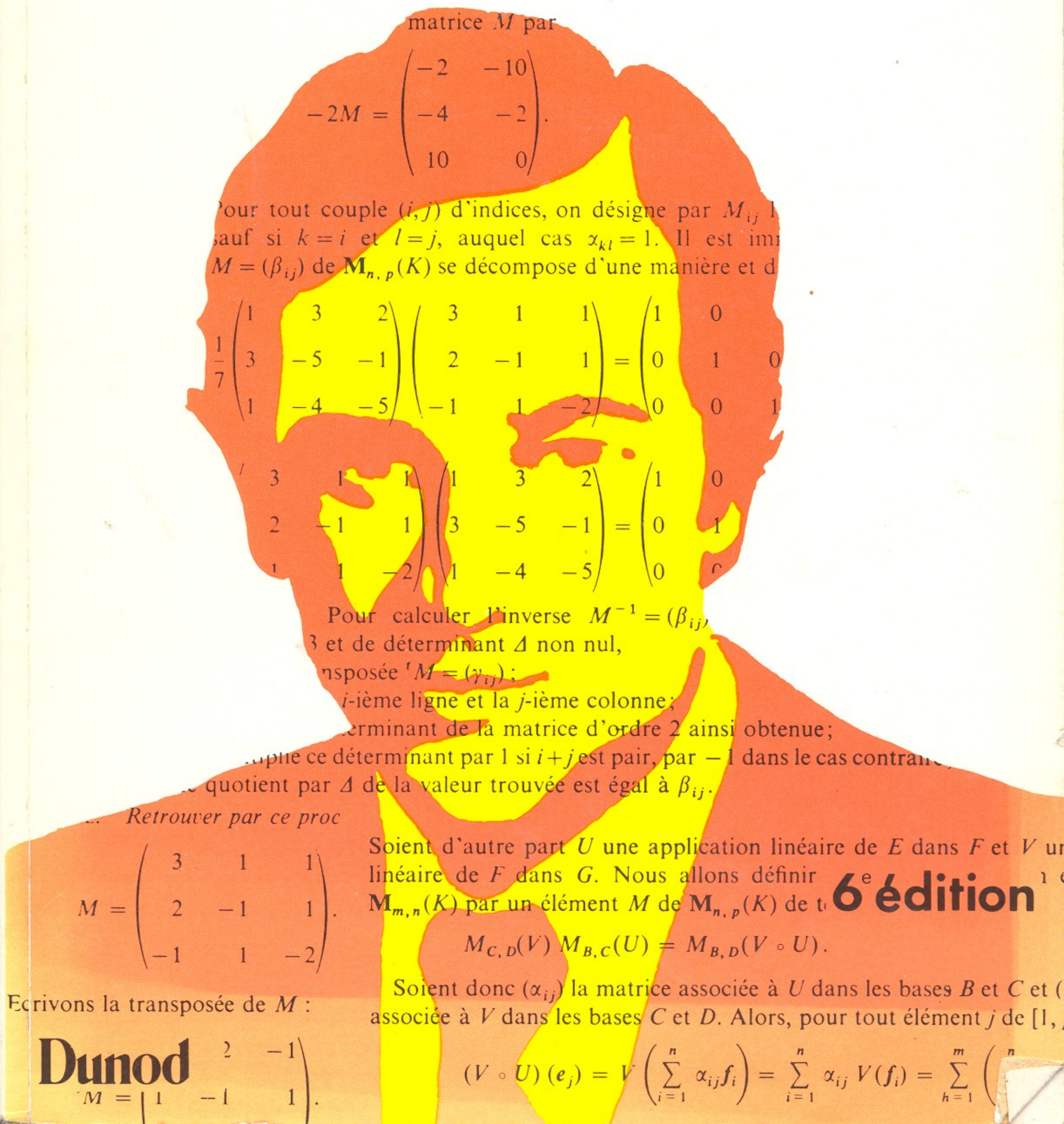
J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

1 – Algèbre



6e édition

Dunod

J. QUINET
Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Tome 1
Algèbre

6e édition corrigée
par une équipe de professeurs
Avec la participation de

J. FAZEKAS
Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris

Dunod

ISBN 2-04-005215-1

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

LES ENSEMBLES

1.1 Ensembles et relations. Le langage des ensembles, introduit il y a plus d'un siècle par Georg Cantor, a envahi toutes les branches des mathématiques ; il est employé en France à tous les niveaux de l'enseignement, y compris l'école maternelle. Nous employons donc ce langage, non seulement parce qu'il est commode, mais aussi et surtout parce qu'il est désormais impossible de l'ignorer.

Les notions d'*ensemble* et de *relation* sont premières, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de les définir à partir d'autres notions.

Intuitivement, une relation est une affirmation portant sur un ensemble E, qui est vérifiée ou non pour un ensemble donné E_0 ; suivant le cas, on dit que E_0 satisfait ou non à cette relation.

- *Négation d'une relation*

Étant donnée une relation R, on définit en logique une nouvelle relation, appelée *négation* de R, et notée (non R), ou encore $\neg R$. La négation de la négation de R est la relation R elle-même.

On dit encore que les relations R et $\neg R$ sont contradictoires, c'est-à-dire que

- pour tout ensemble, l'une des deux relations est vraie,
- mais pour aucun ensemble, elles ne sont vraies l'une et l'autre.

Par exemple, dans l'ensemble des entiers naturels, les relations

R : l'entier x est pair,
$\neg R$: l'entier x n'est pas pair (autrement dit, est impair)

sont contradictoires.

- *Conjonction, disjonction*

On appelle *conjonction* de deux relations R_1 et R_2, et on note (R_1 et R_2), ou $R_1 \wedge R_2$, la relation vraie si et seulement si R_1 et R_2 le sont. On définit enfin la *disjonction* des relations R_1 et R_2 : c'est la relation, notée (R_1 ou R_2), ou $R_1 \vee R_2$, vraie si et seulement si l'une au moins des deux relations R_1 et R_2 est vraie.

- *Implication*

A partir de ces trois définitions fondamentales, on introduit l'*implication* : étant données deux relations R_1 et R_2, la relation (R_2 ou (non R_1)) se note $R_1 \Rightarrow R_2$, et se lit « R_1 implique R_2 ». Si l'implication $R_1 \Rightarrow R_2$ est vraie, tout ensemble satisfaisant à R_1 satisfait à R_2.

La relation d'implication conduit à la notion d'*équivalence* de deux relations : on dit que les relations R_1 et R_2 sont équivalentes, et on note $R_1 \Leftrightarrow R_2$, si chacune d'elles implique l'autre.

L'implication $R_2 \Rightarrow R_1$ est dite *réciproque* de l'implication $R_1 \Rightarrow R_2$. L'implication (non R_2) $\Rightarrow$ (non R_1) est appelée *contraposée* de $R_1 \Rightarrow R_2$. Une implication et sa contraposée sont toujours équivalentes.

EXEMPLE. Soient les relations

R_1 : le triangle ABC a ses trois côtés égaux,
R_2 : le triangle ABC a ses trois angles égaux.

On a l'implication $R_1 \Rightarrow R_2$ (c'est le théorème bien connu : si un triangle a ses trois côtés égaux, il a aussi ses trois angles égaux).

On a aussi l'implication réciproque $R_2 \Rightarrow R_1$ (c'est le théorème : si un triangle a ses trois angles égaux, il a aussi ses trois côtés égaux).

Les deux relations sont donc *équivalentes* :

$$R_1 \Leftrightarrow R_2 .$$

1.2 Égalité. Appartenance. Les relations d'égalité et d'appartenance sont encore des notions premières.

L'*égalité* de deux ensembles E et F se note $E = F$ (et se lit « E égale F»); elle signifie intuitivement que les lettres E et F représentent le même objet.

Pour tout ensemble E, $E = E$. La relation $E = F$ équivaut à la relation $F = E$. Enfin, si $E = F$ et si $F = G$, alors $E = G$. La négation de l'égalité de E et de F se note $E \neq F$ (et se lit « E n'égale pas F», ou « E est différent de F»).

L'*appartenance* d'un ensemble x à un ensemble E se note $x \in E$ (et se lit « x appartient à E»). On dit alors que x est *élément* de E. La négation de l'appartenance de x à E se note $x \notin E$ (et se lit bien entendu « x n'appartient pas à E»).

Pour que deux ensembles E et F soient égaux, il faut et il suffit que les relations d'appartenance à E et à F soient équivalentes :

$$x \in E \Leftrightarrow x \in F .$$

En particulier, l'énoncé précédent affirme l'unicité d'un ensemble n'ayant aucun élément. On admet l'existence d'un tel ensemble, appelé *ensemble vide*, et noté $\varnothing$.

On dit qu'un ensemble E a un élément s'il est non vide et si la conjonction des relations $x \in E$ et $y \in E$ implique $x = y$. On note un tel ensemble $\{x\}$, et on l'appelle *singleton*. On définit de même les ensembles à deux éléments, appelés *paires*; on emploie alors la notation $\{x, y\}$.

Plus généralement, on peut définir un ensemble E par la liste de ses éléments : $E = \{x, y, z, \ldots\}$; on dit que l'ensemble E est donné en *extension*. Dans certains cas, on peut aussi définir un ensemble E par une relation caractéristique R; l'ensemble E est alors donné en *compréhension*.

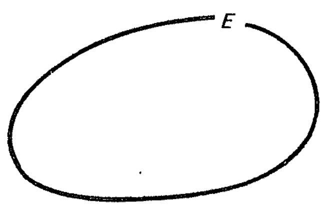


FIG. 1.1 Ensemble.

On représente généralement un ensemble par la partie du plan limitée par un contour fermé (Fig. 1.1).

1.3 Parties d'un ensemble. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus (ou encore contenu) dans F si tout élément de E est élément de F, ce qu'on note $E \subset F$. On dit encore que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F (Fig. 1.2).

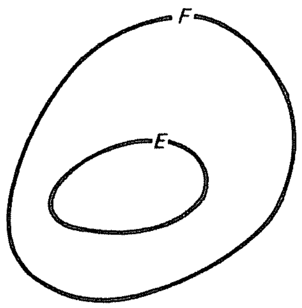


FIG. 1.2 Inclusion.

EXEMPLES

1. L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.

2. L'ensemble des nombres entiers pairs est une partie de l'ensemble des nombres entiers naturels.

La relation d'inclusion possède évidemment les propriétés suivantes :

a) Tout ensemble est contenu dans lui-même.

b) Si un ensemble E est inclus dans un ensemble F, et si F est inclus dans E, alors E est égal à F.

c) Soient E, F et G trois ensembles. Si $E \subset F$ et si $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble, appelé naturellement *ensemble des parties de E*, et noté $\mathscr{P}(E)$.

EXEMPLES

1. Pour tout ensemble E, la partie vide de E, et l'ensemble E lui-même, appartiennent à l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

2. Lorsque $E = \varnothing$, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ a un seul élément, à savoir la partie vide de E :

$$\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

Complémentaire d'une partie d'un ensemble. Soient E un ensemble, et P une partie de E. L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à P s'appelle complémentaire de P dans E, et se note $\complement_E P$, ou plus simplement $\overline{P}$, lorsque aucune confusion n'est à craindre (Fig. 1.3).

On emploie aussi la notation $E - P$, qui sera généralisée plus loin.

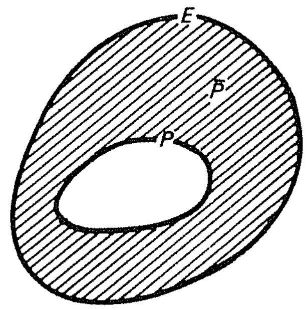


FIG. 1.3 Complémentaire d'une partie.

Le passage aux complémentaires possède évidemment les propriétés suivantes :

a) Le complémentaire dans E du complémentaire $\overline{P}$ d'une partie P de E n'est autre que la partie P elle-même :

$$\overline{\overline{P}} = P.$$

C'est pourquoi on dit souvent que les parties P et $\overline{P}$ sont complémentaires dans E.

b) Soient P et Q deux parties de E. La relation $P = Q$ a lieu si et seulement si $\overline{Q} = \overline{P}$; la relation $P \subset Q$ a lieu si et seulement si $\overline{Q} \subset \overline{P}$.

EXEMPLES

1. Le complémentaire dans E de la partie vide de E est égal à E tout entier :

$$\complement_E \varnothing = E.$$

De même, le complémentaire de la partie de E égale à E tout entier n'est autre que la partie vide de E :

$$\complement_E E = \varnothing.$$

2. Si $E = \{a, b, c, d\}$ et $P = \{a, c\}$:

$$\complement_E P = \{b, d\}.$$

3. Le complémentaire dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels du sous-ensemble P des entiers impairs est l'ensemble des entiers pairs.

Partitions. Soient E un ensemble, et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On appelle *partition* de E toute partie Q de $\mathscr{P}(E)$ constituée de parties non vides de E, telle que tout élément de E appartienne à un élément et un seul de Q.

EXEMPLE. Une partie de $\mathscr{P}(E)$ constituée d'une partie P de E, non vide et distincte de E, et de la partie complémentaire $\bar{P}$, est une partition de E. Ainsi, l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs constituent une partition de N.

1.4 Opérations sur les ensembles.

Intersection de deux ensembles. Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et de F l'ensemble, noté $E \cap F$, constitué des éléments appartenant à la fois à E et à F (Fig. 1.4). (Le symbole $\cap$ se lit « inter ».)

Lorsque l'intersection de E et de F est l'ensemble vide on dit que les ensembles E et F sont *disjoints* (Fig. 1.5).

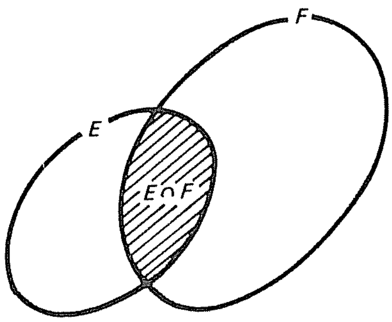


FIG. 1.4 Intersection de deux ensembles.

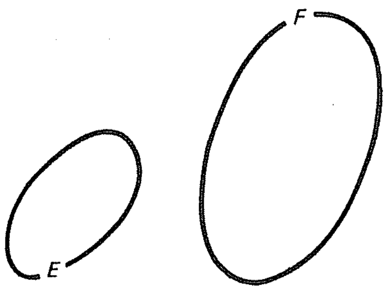


FIG. 1.5 Ensembles disjoints.

EXEMPLES

1. L'intersection de l'ensemble des entiers rationnels multiples de 2 et de l'ensemble des entiers rationnels multiples de 3 est l'ensemble des multiples de 6.

2. L'intersection d'une partie P d'un ensemble E et de son complémentaire dans E est vide :

$$P \cap \bar{P} = \varnothing .$$

3. Plus généralement, deux parties d'une ensemble E appartenant à une même partition de E sont disjointes.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

a) quel que soit l'ensemble E,

$$E \cap E = E ;$$

b) quels que soient les ensembles E et F,

$$E \cap F = F \cap E ;$$

c) quels que soient les ensembles E, F et G,

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) .$$

Les parenthèses étant désormais inutiles, nous noterons $E \cap F \cap G$ la valeur commune des deux membres (Fig. 1.6).

Réunion de deux ensembles. Soient E et F deux ensembles. On appelle réunion de E et de F l'ensemble, noté $E \cup F$, constitué des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles E et F (Fig. 1.7). (Le symbole $\cup$ se lit « union ».)

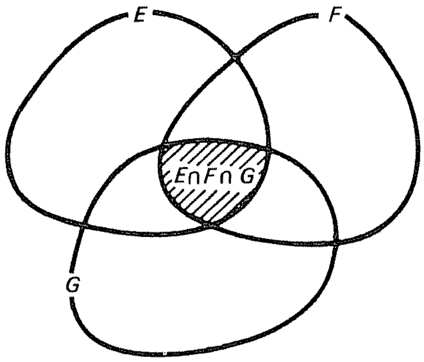


FIG. 1.6 Intersection de trois ensembles.

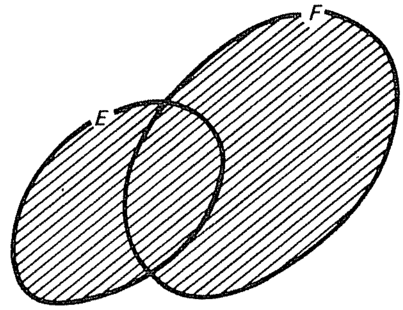


FIG. 1.7 Réunion de deux ensembles.

On pourrait dire plus brièvement que la réunion est l'ensemble des éléments appartenant à E ou à F; mais le mot « ou » a deux acceptions :

OU *inclusif*, signifiant qu'un élément appartenant à E ou à F peut appartenir à ces deux ensembles à la fois;

OU *exclusif*, signifiant qu'un élément appartenant à E ou à F appartient soit à E, soit à F, mais non à $E \cap F$.

Le OU inclusif traduit la notion de réunion. Le OU exclusif conduit à la notion de différence symétrique (voir ci-dessous).

EXEMPLES

1. La réunion de l'ensemble des nombres entiers rationnels multiples de 4 et de l'ensemble des nombres entiers rationnels de la forme $4p+2$, où p parcourt $\mathbf{Z}$, est l'ensemble des nombres pairs.

2. La réunion d'une partie P d'un ensemble E et de son complémentaire dans E est égale à E tout entier :

$$P \cup \overline{P} = E.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

a) quel que soit l'ensemble E,

$$E \cup E = E;$$

b) quels que soient les ensembles E et F,

$$E \cup F = F \cup E\,;$$

c) quels que soient les ensembles E, F et G,

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)\,.$$

Les parenthèses étant désormais inutiles, nous noterons $E \cup F \cup G$ la valeur commune des deux membres (Fig. 1.8).

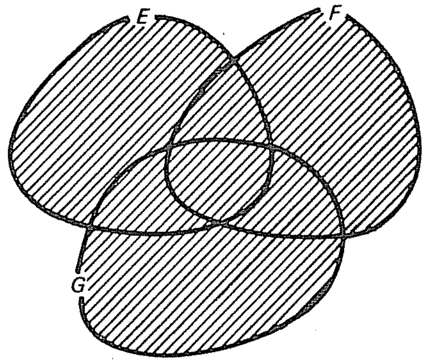


FIG. 1.8 Réunion de trois ensembles.

La réunion et l'intersection sont en quelque sorte compatibles avec l'inclusion; plus précisément, soient E, F et G trois ensembles. Si E est inclus dans F, alors

$$(E \cap G) \subset (F \cap G) \tag{1}$$

et

$$(E \cup G) \subset (F \cup G)\,. \tag{2}$$

Établissons par exemple la relation (1). Soit x un élément de $E \cap G$, c'est-à-dire un élément commun à E et à G. Comme E est contenu dans F, x appartient à F et à G, ce qu'il fallait prouver.

Relations entre intersection et réunion. Soient E, F et G trois ensembles. Alors :

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G) \tag{3}$$

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)\,. \tag{4}$$

Pour établir la relation (3), il suffit, conformément à la définition de l'égalité, de montrer que tout élément du premier membre est élément du second membre, et réciproquement.

Soit d'abord x un élément appartenant à la fois à E et à $F \cup G$; l'élément x appartient soit à F, et donc à $E \cap F$, soit à G, et donc à $E \cap G$. Il s'ensuit que x appartient à la réunion de $E \cap F$ et de $E \cap G$.

Réciproquement, soit y un élément de $(E \cap F) \cup (E \cap G)$. Alors y appartient soit à $E \cap F$, soit à $E \cap G$. Donc y appartient à E, et à $F \cup G$, ce qu'il fallait prouver (Fig. 1.9).

La relation (4) se démontre de la même manière (Fig. 1.10).

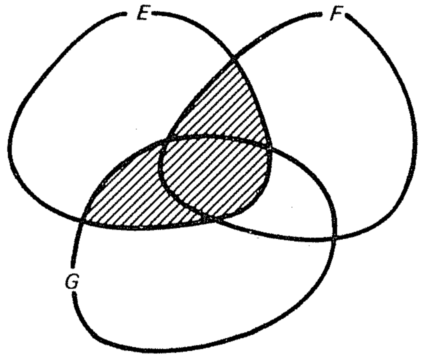


FIG. 1.9 Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.

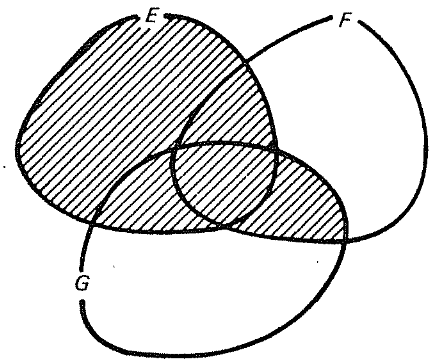


FIG. 1.10 Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection.

L'intersection et la réunion sont encore liées au passage aux complémentaires. En effet, soient P et Q deux parties d'un ensemble E. Le complémentaire de l'intersection de P et Q n'est autre que la réunion de leurs complémentaires (Fig. 1.11) :

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}. \tag{5}$$

Le complémentaire de la réunion de P et de Q n'est autre que l'intersection de leurs complémentaires (Fig. 1.12) :

$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}. \tag{6}$$

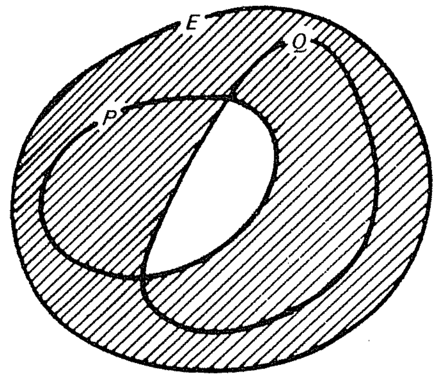


FIG. 1.11 Complémentaire d'une intersection.

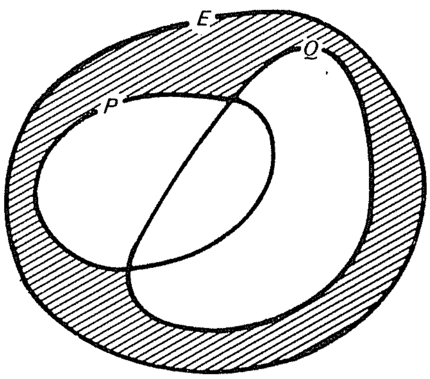


FIG. 1.12 Complémentaire d'une réunion.

Établissons par exemple la relation (5), en montrant que chaque membre est contenu dans l'autre. Soit donc x un élément de $\overline{P \cap Q}$; l'élément x n'appartient pas à la fois à P et à Q. Il s'ensuit que x appartient à l'un au moins des ensembles $\overline{P}$ et $\overline{Q}$, c'est-à-dire à leur réunion.

Réciproquement, soit y un élément de $\overline{P} \cup \overline{Q}$; l'élément y ne peut appartenir à la fois à P et à Q, ce qui signifie que y appartient au complémentaire de $P \cap Q$, ce qu'il fallait prouver.

Définissons maintenant une nouvelle opération, la différence de deux ensembles. Soient E et F deux ensembles. On appelle *différence* de E et de F l'ensemble, noté $E-F$, constitué des éléments de E n'appartenant pas à F (Fig. 1.13). Autrement dit, $E-F$ est le complémentaire dans E de $E \cap F$.

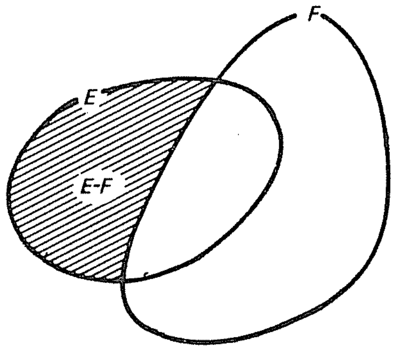


FIG. 1.13 Différence de deux ensembles.

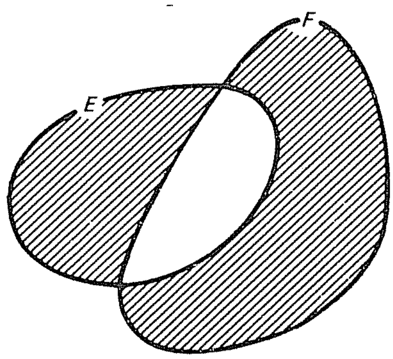


FIG. 1.14 Différence symétrique de deux ensembles.

Considérons en particulier le cas de deux parties P et Q d'un même ensemble E. Alors la différence de P et Q est encore égale à l'intersection de P et du complémentaire de Q dans E :

$$P-Q = P \cap \overline{Q}.$$

La *différence symétrique* de deux ensembles E et F, notée $E \triangle F$, est l'ensemble constitué des éléments appartenant à un et un seul de ces ensembles (Fig. 1.14) ; c'est donc $(E \cup F) - (E \cap F)$. Soient P et Q deux parties d'un ensemble E ; on montrera à titre d'exercice que

$$P \triangle Q = (P \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q}) = (P \cap \overline{Q}) \cup (Q \cap \overline{P}).$$

1.5 Ensemble produit. Considérons deux ensembles x et y et examinons, non pas l'ensemble $\{x, y\}$ qu'ils constituent, mais le couple (x, y) : la différence est qu'on distingue un ensemble x pour être le premier.

C'est ainsi que, si x et y sont différents, les couples (x, y) et (y, x) sont différents, alors que naturellement les ensembles $\{x, y\}$ et $\{y, x\}$ sont égaux.

Deux couples sont égaux si et seulement si leurs premiers éléments respectifs sont égaux, et aussi leurs seconds :

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$$

On définit de même des triplets (x, y, z), des quadruplets (x, y, z, t), ...

Soient alors E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et de F l'ensemble, noté $E \times F$, constitué des couples (x, y) où x appartient à E et y à F.

Lorsque $F = E$, le produit cartésien $E \times E$ se note encore E^2.

Graphes. On dit qu'un ensemble Γ est un graphe si tous ses éléments sont des couples.

On note alors $\mathrm{pr}_1(\Gamma)$ l'ensemble des premières projections des éléments de Γ, $\mathrm{pr}_2(\Gamma)$ l'ensemble des secondes projections; ces ensembles s'appellent respectivement première et seconde projection du graphe Γ.

Ainsi, tout ensemble produit $E \times F$ est un graphe; il en est de même de toute partie de $E \times F$. Inversement, tout graphe Γ peut être considéré comme une partie d'un ensemble produit, par exemple $\mathrm{pr}_1(\Gamma) \times \mathrm{pr}_2(\Gamma)$.

L'ensemble Γ des éléments (x, y) d'un ensemble produit $E \times F$ vérifiant une relation R est un graphe, dit associé à R.

Inversement, toute partie Γ de $E \times F$ peut être considérée comme le graphe associé à une relation, à savoir la relation d'appartenance à Γ.

1.6 Relations binaires. Soit E un ensemble. On appelle relation binaire dans E une relation R portant sur des couples d'éléments de E.

Soit (x, y) un couple d'éléments de E vérifiant la relation R; on emploie la notation xRy (en sous-entendant que la relation $R(x, y)$ est vraie).

Par exemple, la relation d'égalité entre éléments d'un ensemble E est une relation binaire dans E; son graphe est la *diagonale* de E^2, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, x), où x parcourt E. La *relation vide* est la relation binaire dans E dont le graphe est la partie vide de E^2; elle n'est vérifiée par aucun couple d'éléments de E. De même, la *relation pleine* est la relation binaire dans E dont le graphe est E^2; elle est vérifiée par tout couple d'éléments de E. La relation d'inclusion est une relation binaire dans l'ensemble $\mathscr{P}(F)$ des parties d'un ensemble F.

Les liens entre les relations binaires dans un ensemble E et leurs graphes sont très étroits. Les opérations logiques entre relations binaires s'interprètent en termes d'opérations élémentaires sur les parties de E. Ainsi, le graphe de la négation d'une relation binaire R dans E n'est autre que le complémentaire du graphe de R dans E^2. Par exemple, la relation pleine est la négation de la relation vide, et $\complement_{E^2} \varnothing = E^2$. Le graphe de la conjonction de deux relations binaires R_1 et R_2 dans E est l'intersection de leurs graphes; de même, le graphe de la disjonction de R_1 et de R_2 est la réunion de leurs graphes. Pour que R_1 implique R_2, il faut et il suffit que le graphe de R_1 soit contenu dans le graphe de R_2. Par exemple, la relation vide implique toute relation binaire dans E, et toute relation binaire dans E implique la relation pleine. Pour que deux relations binaires dans E soient équivalentes, il est nécessaire et suffisant que leurs graphes soient égaux.

Soit P une partie de E. L'intersection du graphe Γ de R avec l'ensemble produit P^2 définit une relation binaire dans P, dite *induite* par la relation R.

Relations remarquables. Soient E un ensemble, et R une relation binaire dans E.

On dit que R est réflexive si, pour tout élément x de E, xRx.

On dit que R est symétrique si la relation xRy entraîne la relation yRx.

On dit que R est antisymétrique si les relations xRy et yRx entraînent la relation $x = y$.

On dit que R est transitive si les relations xRy et yRz entraînent la relation xRz.

1.7 Relations d'équivalence. Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire R dans E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Soient x et y deux éléments de E tels que xRy; on dit que x est *équivalent* à y, ou, vu la symétrie que x et y sont équivalents.

EXEMPLES

1. Dans tout ensemble E, la relation d'égalité est une relation d'équivalence.

2. Dans l'ensemble des droites affines d'un plan, le parallélisme est une relation d'équivalence.

3. Soient $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels et n un entier naturel non nul. La relation définie par les couples (x, y) tel que n divise $x-y$ est une relation d'équivalence dans $\mathbf{Z}$, appelée *congruence modulo n* et notée

$$x \equiv y \qquad (\text{mod. } n).$$

En effet, il est immédiat que la relation n divise $x-x$ est toujours vraie, que la relation n divise $x-y$ implique la relation n divise $y-x$ et que, si n divise $x-y$ et $y-z$, n divise $(x-y)+(y-z) = x-z$.

4. Soient E un ensemble, et Q une partition de E. Alors la relation binaire dans E définie par les couples (x, y) tels que x et y appartiennent à un même élément de Q est une relation d'équivalence.

Nous allons voir que ce dernier exemple contient en fait le cas général. Introduisons à cet effet la définition suivante :

Soient E un ensemble muni d'une relation d'équivalence, et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x la partie de E, notée $\dot{x}$, constituée des éléments de E équivalents à x.

On appelle classe d'équivalence toute partie P de E telle qu'il existe un élément x de E dont la classe d'équivalence soit P.

Propriétés des classes d'équivalence. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence. Alors tout élément x de E appartient à une classe d'équivalence et une seule, à savoir $\dot{x}$. De plus, deux éléments d'une même classe d'équivalence sont équivalents.

Autrement dit, les classes d'équivalence de E constituent une partition Q de E, et la relation xRy a lieu si et seulement si x et y appartiennent à un même élément de Q.

Il résulte en effet de la réflexivité que tout élément x appartient à sa classe $\dot{x}$.

Supposons maintenant que x appartienne à une classe d'équivalence $\dot{y}$, et montrons que $\dot{x} = \dot{y}$. Il résulte en effet de la transitivité que tout élément équivalent à y est équivalent à x, et donc que $\dot{y}$ est incluse dans $\dot{x}$. Par symétrie, $\dot{x}$ est incluse dans $\dot{y}$. Par antisymétrie de la relation d'inclusion, $\dot{x} = \dot{y}$.

Soient enfin x et y deux éléments d'une même classe. D'après ce qui précède, cette classe peut s'écrire sous la forme $\dot{x}$ (ou $\dot{y}$), ce qui montre que x et y sont équivalents.

L'ensemble des classes d'équivalence de E s'appelle ensemble quotient de E par R, et se note E/R.

On appelle représentant d'un élément α de E/R tout élément x de E admettant α pour classe d'équivalence.

Exemples

1. Lorsque R est la relation d'égalité dans un ensemble E, toutes les classes d'équivalence de E sont réduites à un seul élément.

2. Lorsque R est la relation de congruence modulo n, l'ensemble quotient de $\mathbf{Z}$ par R s'appelle ensemble des classes résiduelles modulo n, et se note $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

1.8 Relations d'ordre. Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire R dans E est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Muni de la relation R, l'ensemble E est dit ordonné.

On note souvent $\prec$ les relations d'ordre. La relation $x \prec y$ se lit « x inférieur à y »; elle se note encore $y \succ x$, ce qu'on lit « y supérieur à x ».

Exemples

1. Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, la relation d'inclusion est une relation d'ordre.

2. La relation notée $\leqslant$ est une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels, dans l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, et dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels.

On remarquera qu'un nombre entier naturel x est inférieur à un nombre entier naturel y si et seulement si l'intervalle $[0, x]$ de $\mathbf{N}$ est inclus dans l'intervalle $[0, y]$ de $\mathbf{N}$.

3. Dans l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers naturels non nuls, la relation de divisibilité est une relation d'ordre.

En effet, par définition, un élément b divise un élément a s'il existe un entier q tel que $a = bq$. Il s'ensuit que :

— tout élément a de $\mathbf{N}^*$ est divisible par lui-même : $a = a \times 1$;

— si b divise a et a divise b, il existe deux entiers q et q' tels que $a = bq$ et $b = aq'$, d'où $b = bqq'$; comme b est non nul, $qq' = 1$, ce qui implique que $q = 1$, et donc que $a = b$;

— enfin, si b divise a, et si c divise b, $a = bq$ et $b = cr$, d'où $a = c(qr)$, et c divise a.

On notera que dans **N**, **Z**, **Q** ou **R**, la relation $a < b$ (lire « a strictement inférieur à b »), définie par $a \leqslant b$ et $a \neq b$, est transitive, mais ce n'est pas une relation d'ordre. (Il n'y a pas réflexivité.) La relation $a < b$ équivaut à la relation $b > a$ (lire « b strictement supérieur à a »).

Plus généralement, soit E un ensemble ordonné. On dit que x est strictement inférieur à y, ou que y est strictement supérieur à x, si

$$x \prec y \quad \text{et} \quad x \neq y.$$

Éléments comparables. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre. On dit que deux éléments x et y de E sont comparables si l'une au moins des relations $x \prec y$ ou $y \prec x$ est vraie. Une relation d'ordre dans un ensemble E est une relation d'ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables. On dit alors que E est totalement ordonné.

EXEMPLES

1. La relation d'inclusion dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E n'est pas une relation d'ordre total. Par exemple, deux parties disjointes non vides ne sont pas comparables.

2. La relation $\leqslant$ dans **N**, **Z**, **Q** ou **R** est une relation d'ordre total.

3. La relation de divisibilité dans **N*** n'est pas une relation d'ordre total. Par exemple, 3 ne divise pas 5, et 5 ne divise pas 3.

Voici des définitions d'usage courant, que nous appliquerons aux cas où E est égal à **N**, **Z**, **Q** ou **R** :

1.9 Parties majorées, minorées, bornées. Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre, notée $\prec$, et P une partie non vide de E.

On dit qu'un élément b de E majore P, ou que b est un majorant de P, si, pour tout élément x de P, $x \prec b$. On dit encore que P est majorée par b.

On dit de même qu'un élément a de E minore P si, pour tout élément x de P, $a \prec x$.

On dit que la partie P est majorée si l'ensemble de ses majorants est non vide. On dit de même que la partie P est minorée si l'ensemble de ses minorants est non vide.

On dit enfin que la partie P est bornée si elle est majorée et minorée.

Un majorant de la partie P appartenant à P, s'il existe, est unique; on l'appelle le *plus grand élément* de P. On définit de même le *plus petit élément* de P comme l'unique minorant de P appartenant à P.

Le plus petit élément de l'ensemble des majorants de P, s'il existe, s'appelle *borne supérieure* de P, et se note $\sup\limits_{x \in P} x$. Autrement dit, c'est un majorant de P inférieur à tout majorant de P.

On définit de même la *borne inférieure* de P comme le plus grand des minorants de P ; on note cet élément $\inf\limits_{x \in P} x$.

Lorsque la partie P a deux éléments, x et y, les bornes supérieure et inférieure de P se notent respectivement $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$.

Intervalles. Soit E un ensemble ordonné. On appelle intervalle de E toute partie I de E telle que, pour tout couple (c, d) d'éléments de I tel que $c \prec d$, tout élément x de E satisfaisant à la relation $c \prec x \prec d$ appartienne à I.

EXEMPLES

1. La partie vide de E, et E tout entier, sont des intervalles de E.

2. Soient a et b deux éléments de E tels que $a \prec b$. On vérifie aisément que l'ensemble des éléments x de E tels que $a \prec x \prec b$ est un intervalle, appelé *intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b*, et noté $[a, b]$.

De même, l'ensemble des éléments x de E tels que $a \prec x \prec b$, $x \neq a$ et $x \neq b$, est un intervalle de E, appelé *intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b*, et noté $]a, b[$.

Enfin, les ensembles $[a, b] - \{a\}$ et $[a, b] - \{b\}$ sont des intervalles, dits *semi-ouverts* et notés respectivement $]a, b]$ et $[a, b[$.

3. L'ensemble des éléments de E supérieurs à a, l'ensemble des éléments de E inférieurs à b, sont des intervalles de E.

1.10 Applications. La notion d'*application* généralise la notion de fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Soient E et F deux ensembles non vides, et P une partie du produit cartésien $E \times F$. On suppose que, pour tout élément x de E, il existe un élément y et un seul de F tel que le couple (x, y) appartienne à P.

Le triplet $f = (E, F, P)$ s'appelle application de E dans F, ou encore application définie sur E à valeurs dans F.

L'ensemble E s'appelle ensemble de définition de f, ou encore ensemble de départ; l'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée. La partie P s'appelle le graphe de f (Fig. 1.15).

Par définition, l'application f associe à tout élément x de E l'unique élément y de F tel que le couple (x, y) appartienne à la partie P. L'élément y se note $f(x)$, et s'appelle image de x par f.

On représente d'habitude le triplet (E, F, P) de l'une des manières suivantes :

$$f : E \to F.$$

$$E \xrightarrow{f} F.$$

La correspondance entre x et $f(x)$ se note

$$f : x \mapsto f(x).$$

La flèche $\mapsto$ est employée pour prévenir toute confusion avec la notation précédente : dans l'expression $f : E \to F$, E est l'ensemble de départ, tandis que dans l'expression $f : x \mapsto f(x)$, x est un élément de E.

Cette flèche évite aussi toute confusion avec la notion de limite : le symbole $x \to a$ se lit « x tend vers a ».

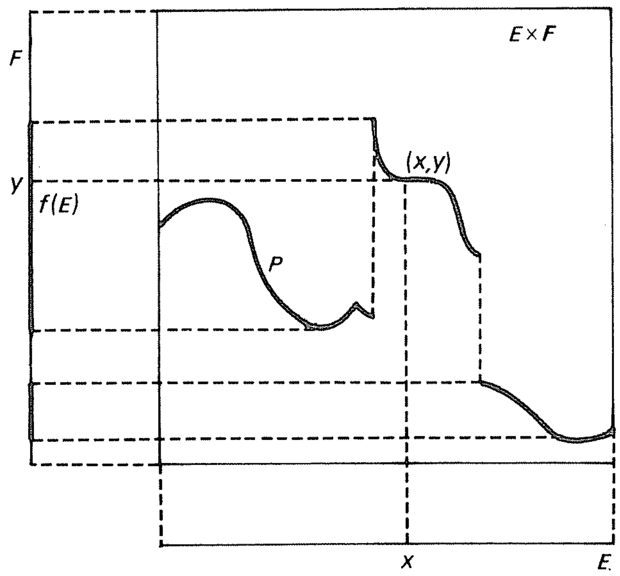


FIG. 1.15 Graphe d'une application.

Soit P une partie de E. La partie de F constituée des images des éléments de P s'appelle image de P par f, et se note $f(P)$.

Lorsque les ensembles E et F sont égaux et que $f(P)$ est contenue dans P, on dit, que la partie P est *stable* par l'application f.

EXEMPLES

1. Soit E un ensemble non vide. L'application de E dans lui-même qui à tout élément x de E associe ce même élément s'appelle *application identique* de E, et se note I_E ; son graphe est la diagonale de E^2.

2. Soient E et F deux ensembles non vides. On dit qu'une application f de E dans F est *constante* si, pour tout couple (x, x') d'éléments de E, $f(x) = f(x')$. (Autrement dit, une application f est constante si l'image de E par f est un ensemble à un élément.)

On confond souvent f avec l'unique valeur y_0 qu'elle prend sur les éléments de E, en disant que f est constante et égale à y_0.

3. Soit E un ensemble non vide. On appelle *fonction caractéristique* d'une partie P de E l'application, notée χ_P, de E dans un ensemble à 2 éléments $\{0, 1\}$, qui prend la valeur 1 sur les éléments de P, et la valeur 0 sur les éléments du complémentaire $\overline{P}$ de P dans E.

4. Soit F un ensemble non vide. On appelle *suite d'éléments de F* toute application de $\mathbf{N}$ dans F.

Une suite (u_n) d'éléments de F est alors une application de $\mathbf{N}$ dans F, prenant la valeur u_0 pour l'entier 0, la valeur u_1 pour l'entier 1, ..., la valeur u_n pour l'entier n, ...

On dit qu'une suite est *stationnaire* si elle prend la même valeur à partir d'un certain rang. (En accord avec l'exemple 2, on dit qu'une suite est constante si elle prend la même valeur pour tout entier naturel.)

Restriction d'une application. Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F, et P une partie de E. L'application $\tilde{f}$ de P dans F qui à tout élément x de P associe l'élément $f(x)$ de F s'appelle la *restriction* de f à la partie P.

On dit aussi que f est un *prolongement* à E de l'application $\tilde{f}$.

Voici une autre terminologie souvent employée :

Soient I et F deux ensembles non vides. On appelle *famille* d'éléments de F indexée par I toute application de I dans F.

On note une telle famille : $i \mapsto x_i$, ou encore $(x_i)_{i \in I}$. L'élément i s'appelle indice.

Prenons pour F l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, et considérons une famille $(P_i)_{i \in I}$ de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de F).

On appelle intersection de cette famille, et on note $\bigcap_{i \in I} P_i$, l'ensemble des éléments de E appartenant à P_i pour tout élément i de I.

On appelle réunion de cette famille, et on note $\bigcup_{i \in I} P_i$, l'ensemble des éléments de E appartenant à l'une au moins des parties P_i.

Lorsque I est un ensemble à deux éléments, on retrouve l'intersection et la réunion de deux parties de E.

Lorsque I est une partie de l'ensemble des entiers naturels, le langage des familles coïncide avec celui des suites. En particulier, lorsque $I = \mathbf{N}$, l'intersection et la réunion de la famille (P_n) se notent respectivement

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} P_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n .$$

Lorsque $I = [1, p]$, l'intersection et la réunion de la famille $(P_n)_{1 \leqslant n \leqslant p}$ se notent respectivement

$$\bigcap_{n=1}^{p} P_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{p} P_n .$$

1.11 Équations. Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F, et y_0 un élément de F. On appelle équation la relation

$$f(x) = y_0 . \tag{1}$$

L'élément x s'appelle inconnue. On appelle solution de l'équation (1) tout élément x_0 de E vérifiant la relation (1) (Fig. 1.16), c'est-à-dire tel que

$$f(x_0) = y_0 .$$

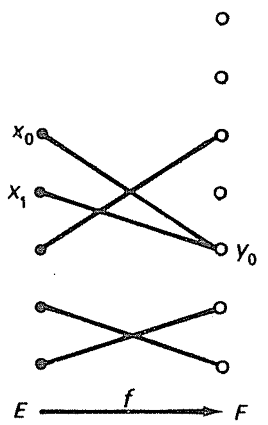


FIG. 1.16 L'équation $f(x) = y_0$ admet deux solutions x_0 et x_1.

La recherche de l'ensemble des solutions s'appelle résolution de l'équation (1).

La notion d'équation permet d'introduire la terminologie fondamentale que voici :

Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E dans F.

On dit que f est injective, ou que f est une injection de E dans F, si, pour tout élément y_0 de F, l'équation $f(x)=y_0$ admet au plus une solution (Fig. 1.17). (Autrement dit, la relation $f(x)=f(x')$ implique la relation $x=x'$.)

On dit que f est surjective, ou que f est une *surjection* de E sur F, si, pour tout élément y_0 de F, l'équation $f(x)=y_0$ admet au moins une solution (Fig. 1.18). (Autrement dit, si l'image de f est égale à F tout entier.) On dit alors que f est une application de E sur F.

On dit que f est bijective, ou que f est une *bijection* de E sur F, si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si, pour tout élément y_0 de F, l'équation $f(x)=y_0$ admet une solution et une seule (Fig. 1.19).

Une bijection d'un ensemble E sur lui-même s'appelle encore *permutation* de E.

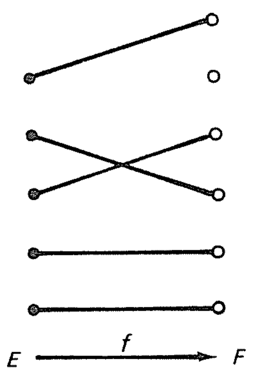


FIG. 1.17 Injection.

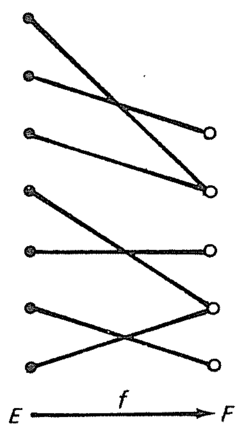


FIG. 1.18 Surjection.

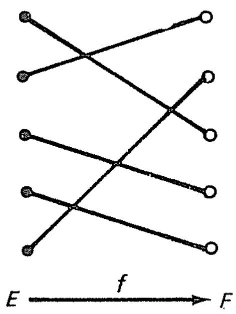


FIG. 1.19 Bijection.

EXEMPLES

1. L'application $x \mapsto x^2$ de l'ensemble **R** des nombres réels dans lui-même n'est ni injective, ni surjective :

— elle n'est pas injective, car elle prend la même valeur pour deux valeurs opposées de la variable;

— elle n'est pas surjective, car elle ne prend aucune valeur strictement négative.

2. L'application $x \mapsto x^2$ définie sur **R** à valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$ de **R** est surjective, et non injective.

3. L'application $x \mapsto x^2$ définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans **R** est injective, et non surjective.

4. L'application $x \mapsto x^2$ de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans lui-même est bijective.

5. Soit E une partie d'un ensemble F. L'application de E dans F qui à tout élément x de E associe ce même élément est injective. On l'appelle *injection canonique de E dans F.*

6. Soient E un ensemble non vide, R une relation d'équivalence sur E, et E/R l'ensemble quotient. L'application φ de E dans E/R qui à tout élément de E associe sa classe d'équivalence est surjective. On l'appelle *application canonique de E sur E/R.*

On remarquera que, dans la donnée d'une application, il est indispensable de préciser non seulement l'ensemble de départ, mais aussi l'ensemble d'arrivée : si on remplace F par l'image de E par f, la nouvelle application obtenue $g = (E, f(E), P)$ est toujours surjective, ce qui n'est pas le cas en général pour f. (Les applications f et g prennent cependant même valeur pour tout élément x de E.)

1.12 Composition des applications. Soient E, F et G trois ensembles non vides, f une application de E dans F, et g une application de F dans G. On appelle application composée des applications f et g, et on note $g \circ f$, l'application de E dans G qui à tout élément x associe l'élément $g[f(x)]$.

Il est immédiat que

a) Pour toute application f de E dans F,

$$I_F \circ f = f \qquad \text{et} \qquad f \circ I_E = f,$$

où I_E et I_F désignent respectivement l'application identique de E et l'application identique de F;

b) Quelles que soient les applications f de E dans F, g de F dans G et h de G dans H,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

En effet, les deux membres font correspondre à tout élément x l'élément $h\{g[f(x)]\}$.

Les parenthèses étant désormais inutiles, nous noterons $h \circ g \circ f$ la valeur commune des deux membres.

EXEMPLES

1. La composée de l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et de l'application $g : y \mapsto ay^2 + by + c$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est l'application

$$g \circ f : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c .$$

2. La composée de deux translations est une translation; la composée de deux rotations planes est une rotation ou une translation; la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation.

Soient E, F et G trois ensembles non vides, f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

Si f et g sont injectives, il en est de même de $g \circ f$.
Si f et g sont surjectives, il en est de même de $g \circ f$.
Si f et g sont bijectives, il en est de même de $g \circ f$.

En effet, si f et g sont injectives, et si

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') ,$$

l'injectivité de g montre que $f(x) = f(x')$, et l'injectivité de f montre que $x = x'$; donc $g \circ f$ est injective.

Si f et g sont surjectives, l'image de E par f est égale à F, l'image de F par g est égale à G, et l'image de E par $g \circ f$ est évidemment égale à G.

Le cas où f et g sont bijectives se déduit aussitôt des deux cas précédents.

Définissons maintenant une application inversible : Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E dans F. On dit que f est inversible s'il existe une application g de F dans E telle que

$$g \circ f = I_E \text{ et } f \circ g = I_F .$$

Une telle application g, si elle existe, est unique. On l'appelle application *réciproque* (ou application inverse) de f; on la note f^{-1}, ou encore $\overset{-1}{f}$.

Soit en effet h une application de F dans E telle que

$$h \circ f = I_E \qquad \text{et} \qquad f \circ h = I_F .$$

Composons à gauche par g les deux membres de la dernière relation; il vient

$$g \circ f \circ h = g \circ I_F ,$$

soit, en tenant compte de la relation $g \circ f = I_E$,

$$I_E \circ h = g \circ I_F ,$$

ou encore $h = g$, ce qu'il fallait prouver.

EXEMPLE. Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, une rotation de centre O et d'angle α est inversible; son application réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.

Les applications inversibles sont faciles à caractériser; en effet soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E dans F. Pour que f soit inversible, il faut et il suffit que f soit une bijection de E sur F.

La condition est *nécessaire* : supposons en effet f inversible, et considérons l'unique application g telle que

$$g \circ f = I_E, \qquad f \circ g = I_F.$$

Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. En composant les deux membres par g, nous voyons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, soit $x = x'$. L'application f est donc injective.

Soit maintenant y_0 un élément de F. Il est immédiat que y_0 est l'image par f de $g(y_0)$. Par suite, l'application f est surjective, et donc bijective, ce qu'il fallait prouver.

La condition est *suffisante* : supposons en effet f bijective, et considérons l'application g de F dans E qui associe à tout élément y de F l'unique solution de l'équation $f(x) = y$. Il est immédiat que, pour tout élément x de E,

$$(g \circ f)(x) = g(y) = x,$$

et donc que $g \circ f = I_E$.

De même, pour tout élément y de F,

$$(f \circ g)(y) = f(x) = y,$$

et donc $f \circ g = I_F$. Il s'ensuit que f est inversible, ce qui achève la démonstration.

1.13 Images réciproques. Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E dans F. On appelle image réciproque d'un élément y de F, et on note $f^{-1}(y)$, l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) = y$ (Fig. 1.20).

On remarquera que l'image réciproque de y est vide lorsque y n'appartient pas à l'image de F (ce qui peut avoir lieu si f n'est pas surjective), et que l'image réci-

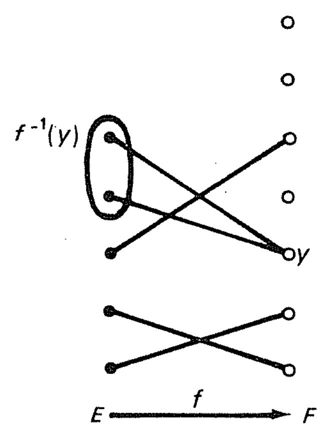


FIG. 1.20 Image réciproque d'un élément.

proque de y peut contenir plus d'un élément, si f n'est pas injective. Par exemple, si f est constante et égale à y_0, l'image réciproque de tout élément de F autre que y_0 est vide, tandis que l'image réciproque de y_0 est égale à E.

Cependant, lorsque f est inversible, l'image réciproque $f^{-1}(y)$ de tout élément y de F contient un élément et un seul, à savoir l'image de y par l'application réciproque de f, ce qui explique la notation $f^{-1}(y)$.

Il est immédiat que l'ensemble des images réciproques des éléments de l'image de E par f est une partition de E. Autrement dit, la relation xRx' si $f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence sur E.

Réciproquement, toute relation d'équivalence R sur un ensemble E peut être définie de la manière précédente, en introduisant l'application canonique φ de E sur E/R; les classes d'équivalence ne sont autres que les images réciproques des éléments de E/R.

Soit Q une partie de F. La partie de E réunion des images réciproques des éléments de Q s'appelle image réciproque de Q par f, et se note $f^{-1}(Q)$.

EXERCICES

1.1 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités

a) $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

b) $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

c) $A \cap (B-C)=(A \cap B) \cap (A-C)$.

1.2 Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, on considère l'équation

$$A \cap X = B.$$

a) Indiquer une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette des solutions.

b) Résoudre alors cette équation.

1.3 Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, on considère l'équation

$$A \cup X = B$$

a) Indiquer une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette des solutions.

b) Résoudre alors cette équation.

Relations binaires

1.4 Déterminer toutes les relations d'ordre dans un ensemble à trois éléments $E=\{a, b, c\}$.

1.5 Déterminer toutes les relations d'équivalence dans un ensemble à trois éléments $E=\{a, b, c\}$.

1.6 Soit R une relation réflexive et transitive dans un ensemble E. Montrer que la relation S définie par les couples (x, y) tels que xRy et yRx est une relation d'équivalence.

1.7 Soit R une relation réflexive et symétrique dans un ensemble E. Montrer que la relation S définie par les couples (x, y) tels qu'il existe un entier naturel non nul n et une suite $(x_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ d'éléments de E tels que

$$x=x_0, \quad y=x_n, \qquad \text{et} \qquad x_p \, R \, x_{p+1} \qquad \text{si} \qquad p \in [0, n-1],$$

est une relation d'équivalence.

Applications

1.8 Montrer que l'application f de $\mathbf{Z}$ dans lui-même définie par les relations

$$f(n) = n+2 \qquad \text{si } n \text{ est pair}$$
$$f(n) = n+4 \qquad \text{si } n \text{ est impair}$$

est bijective.

En est-il de même lorsqu'on remplace $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{N}$?

1.9 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

a) Montrer que f est injective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

1.10 Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

a) Montrer que si h est injective, f l'est aussi, et que, si de plus f est surjective, alors g est injective.

b) Montrer que si h est surjective, g l'est aussi, et que, si de plus g est injective, alors f est surjective.

1.11 Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans E. Montrer que si deux des applications composées $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont injectives et la troisième surjective, alors f, g et h sont bijectives.

1.12 Soient X un ensemble et E l'ensemble des applications de X dans lui-même. Pour tout entier naturel non nul et pour tout élément f de E, on définit f^n comme la composée de n applications égales à f.

a) Montrer que la relation binaire R définie par les couples (f, g) d'éléments de E tels qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $f^n = g^n$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que la relation binaire S définie par les couples (f, g) d'éléments de E tels qu'il existe un couple (m, n) d'entiers naturels non nuls tel que $f^m = g^n$ est une relation d'équivalence.

1.13 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Soient P et P' deux parties de E. Montrer que

a) $f(P \cup P') = f(P) \cup f(P')$;

b) $f(P \cap P') \subset f(P) \cap f(P')$,
avec égalité si et seulement si f est injective;

c) $f(P - P') \supset f(P) - f(P')$,
avec égalité si et seulement si f est injective.

1.14 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Soient Q et Q' deux parties de F. Montrer que

a) $f^{-1}(Q \cup Q') = f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(Q')$;

b) $f^{-1}(Q \cap Q') = f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q')$;

c) $f^{-1}(Q - Q') = f^{-1}(Q) - f^{-1}(Q')$.

CHAPITRE 2

STRUCTURES ÉLÉMENTAIRES

La notion de structure est à la base de la puissance des mathématiques dans les domaines les plus divers. A conserver le plus longtemps possible une certaine abstraction, on fabrique des « cadres » susceptibles d'être reconnus dans telle ou telle application pratique : les démonstrations se trouvent donc très simplifiées, puisque tout ce qui est accessoire se trouve éliminé.

Une structure est la donnée d'une ou plusieurs lois de composition.

Nous allons donc, dans ce chapitre, examiner les lois de composition et définir les structures les plus usitées dans les applications : groupes, anneaux, corps. Une autre structure très importante, la structure d'espace vectoriel, sera examinée ultérieurement.

2.1 Lois de composition internes. La notion de loi de composition interne généralise celle d'opération, bien connue en arithmétique et en algèbre. Avec le langage des ensembles, les lois de composition apparaissent comme un cas particulier des applications.

Soit E un ensemble non vide. On appelle loi de composition interne sur E une application de $E \times E$ dans E qui, à tout couple (x, y) d'éléments de E associe un élément, noté généralement $x \perp y$, appelé composé de x et de y.

EXEMPLES

1. L'addition est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, sur l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels, sur l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, sur l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Le composé de deux éléments x et y pour l'addition se note $x+y$, et s'appelle somme de x et de y.

2. La multiplication est aussi une loi de composition interne sur les ensembles précédents. Le composé de deux éléments x et y pour la multiplication se note $x \times y$, $x.y$, ou encore xy, et s'appelle produit de x et de y.

3. Sur l'ensemble $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$ des entiers naturels non nuls, l'*exponentiation* (application qui à tout couple (x, y) associe x^y) est une loi de composition interne.

4. Sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble, la réunion et l'intersection sont des lois de composition internes.

5. Sur l'ensemble $\mathscr{F}(E)$ des applications d'un ensemble E dans lui-même, l'application qui à tout couple (f, g) d'applications associe leur composée $g \circ f$ est une loi de composition interne.

6. Sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, le produit scalaire n'est pas une loi de composition interne. (En effet, le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire, et non un vecteur.)

Posons encore quelques définitions. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit que deux éléments x et y de E commutent (ou sont *permutables*) si

$$x \perp y = y \perp x .$$

Les lois pour lesquelles deux éléments quelconques commutent sont d'une étude plus simple. On les appelle des lois commutatives.

∘ On dit qu'une loi de composition interne est *associative* si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E,

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z) .$$

La valeur commune des deux membres est alors notée plus simplement

$$x \perp y \perp z .$$

On emploie généralement la notation additive pour les lois à la fois associatives et commutatives. On emploie souvent la notation multiplicative pour les lois associatives.

EXEMPLES

1. Sur les ensembles $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives; sur les ensembles $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, la soustraction n'est ni associative ni commutative.

2. Sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, la réunion et l'intersection sont associatives et commutatives. La différence symétrique est commutative; la différence ne l'est pas.

3. Sur $\mathbf{N}^*$, l'exponentiation n'est ni associative, ni commutative. Par exemple, $2^3 = 8$ tandis que $3^2 = 9$; $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$, tandis que $(2^2)^3 = 4^3 = 64$.

4. Sur $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$, la division n'est ni associative, ni commutative. Par exemple, $3/5$ est différent de $5/3$; $(3/5)/2 = 3/10$, tandis que $3/(5/2) = 6/5$.

5. Sur l'ensemble $\mathscr{F}(E)$ des applications d'un ensemble E dans lui-même, la composition des applications est associative, mais non commutative.

6. La multiplication des matrices carrées d'ordre 2, ou d'ordre 3, est associative, mais non commutative (voir chapitre 7).

∘ Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit qu'un élément a de E est *régulier* si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, la relation $a \perp x = a \perp y$ entraîne la relation $x = y$, et si la relation $x \perp a = y \perp a$ entraîne la relation $x = y$.

On dit encore que l'on peut simplifier par a les relations $a \perp x = a \perp y$ et $x \perp a = y \perp a$.

EXEMPLES

1. Dans l'ensemble **N** des entiers naturels, tous les éléments sauf 0 sont réguliers pour la multiplication; tous les éléments sont réguliers pour l'addition.

2. Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, seul l'élément E est régulier pour l'intersection. Considérons en effet une partie P de E différente de E. Alors

$$P \cap \overline{P} = P \cap \varnothing = \varnothing,$$

tandis que $\overline{P} \neq \varnothing$.

De même, seule la partie vide de E est un élément régulier pour la réunion.

• Nous connaissons des lois de composition internes pour lesquelles il existe un élément privilégié, dont les composés par tout élément x ne sont autres que x; ainsi, dans **N**, **Z**, **Q**, **R** ou **C**, l'élément 0 est tel que, pour tout élément x,

$$0+x = x+0 = x.$$

De même, l'élément 1 est tel que, pour tout élément x,

$$1 \times x = x \times 1 = x.$$

Plus généralement, dans un ensemble E muni d'une loi de composition interne, on dit qu'un élément e de E est *élément neutre* pour cette loi si, pour tout élément x de E,

$$e \perp x = x \quad \text{et} \quad x \perp e = x.$$

On remarquera que si la loi est commutative, ces deux conditions sont équivalentes.

Une loi de composition interne admet au plus un élément neutre.

Soient en effet e et e' deux éléments neutres. Alors, comme e est élément neutre,

$$e' \perp e = e \perp e' = e';$$

comme e' est élément neutre,

$$e \perp e' = e' \perp e = e,$$

d'où $e' = e$.

On notera que l'élément neutre, s'il existe, commute avec tout élément de E. De plus, l'élément neutre est un élément régulier.

EXEMPLES

1. Avec cette terminologie, 0 est élément neutre pour l'addition de **N**, **Z**, **Q**, **R** et **C**; 1 est élément neutre pour la multiplication de ces mêmes ensembles. Mais, sur **Z**, **Q**, **R** et **C**, la soustraction n'admet pas d'élément neutre.

2. Soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. L'élément E est élément neutre pour l'intersection; la partie vide de E est élément neutre pour la réunion et pour la différence symétrique. Autrement dit, pour toute partie P de E,

$$E \cap P = P \cap E = P\,,$$
$$\varnothing \cup P = P \cup \varnothing = P\,,$$
$$\varnothing \triangle P = P \triangle \varnothing = P\,.$$

3. Soit $\mathscr{F}(E)$ l'ensemble des applications d'un ensemble E dans lui-même. L'application identique de E est élément neutre pour la composition des applications.

∘ Considérons maintenant un ensemble E muni d'une loi de composition interne admettant un élément neutre. On peut se demander si, pour un élément x donné de E, il existe un élément y tel que le composé de x et de y (ou le composé de y et de x) ne soit autre que l'élément neutre e.

Par exemple, dans **N** muni de l'addition, 0 est le seul élément x tel qu'il existe un élément y satisfaisant aux relations

$$y+x = x+y = 0\,;$$

mais, dans **Z** muni de l'addition, pour tout élément x, il existe un élément, noté $-x$, tel que

$$x+(-x) = (-x)+x = 0\,.$$

De même, dans **Z** muni de la multiplication, 1 et -1 sont les seuls éléments x tels qu'il existe un élément y satisfaisant aux relations

$$yx = xy = 1\,;$$

mais, dans **Q** muni de la multiplication, tout élément x non nul est tel qu'il existe un élément, noté x^{-1}, satisfaisant aux relations

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1\,.$$

Plus généralement, soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne possédant un élément neutre e. On dit qu'un élément x de E est symétrisable s'il existe un élément y de E tel que

$$y \perp x = e \qquad \text{et} \qquad x \perp y = e\,.$$

(Lorsque la loi est commutative, ces deux conditions sont équivalentes.)

On dit alors que y est un *symétrique* de x.

Il est immédiat que, dans ces conditions, x est un symétrique de y.

On remarquera que l'élément e lui-même est toujours symétrisable, puisque $e \perp e = e$.

Lorsque la loi de composition interne est associative, tout élément de E admet au plus un symétrique.

Soient en effet y et y' deux symétriques d'un élément x. Alors, par définition,

$$y \perp x = x \perp y = e \qquad \text{et} \qquad y' \perp x = x \perp y' = e\,.$$

La loi étant associative, les éléments $(y \perp x) \perp y'$ et $y \perp (x \perp y')$ sont égaux. Or,

$$(y \perp x) \perp y' = e \perp y' = y' ,$$

et

$$y \perp (x \perp y') = y \perp e = y ,$$

donc $y' = y$, ce qu'il fallait prouver.

Lorsque la loi est associative, on peut donc parler *du* symétrique d'un élément symétrisable. Si la loi est notée additivement, le symétrique de x s'appelle *opposé* de x, et se note $-x$; si x' est un élément de E, l'élément $x' + (-x)$ se note plus simplement $x' - x$. Si la loi est notée multiplicativement, un élément symétrisable x est dit *inversible*; le symétrique de x s'appelle *inverse* de x, et se note x^{-1}. Lorsque, de plus, la loi est commutative, et que l'élément unité est noté 1, l'inverse de x se note encore $\frac{1}{x}$.

EXEMPLES

1. Avec cette terminologie,
— dans **N** muni de l'addition, seul 0 est symétrisable;
— dans **N** muni de la multiplication, seul 1 est inversible;
— dans **Z**, **Q**, **R** et **C** munis de l'addition, tous les éléments sont symétrisables;
— dans **Z** muni de la multiplication, seuls 1 et -1 sont inversibles;
— dans **Q**, **R** et **C** munis de la multiplication, tous les éléments non nuls sont inversibles.

2. Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E muni de l'intersection (ou de la réunion), aucun élément autre que l'élément neutre n'est symétrisable.

Dans $\mathscr{P}(E)$ muni de la différence symétrique, tout élément P est symétrisable, et est son propre symétrique.

La notion de symétrique est liée à celle de régularité, que nous avons vue plus haut. En effet, soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative possédant un élément neutre e. Alors tout élément symétrisable est régulier.

Soit en effet a un élément symétrisable; considérons deux éléments x et y tels que

$$a \perp x = a \perp y \qquad \text{et} \qquad x \perp a = y \perp a .$$

Composons les deux membres de la première relation à gauche par le symétrique b de a. Il vient

$$b \perp a \perp x = b \perp a \perp y ,$$

soit

$$e \perp x = e \perp y ,$$

ou encore $x = y$.

(Ce résultat se déduit de même de la deuxième relation; il suffit de composer les deux membres à droite par b.)

On remarquera que la réciproque est fausse : ainsi, dans l'ensemble **N**, tous les éléments sont réguliers pour l'addition, mais seul 0 est symétrisable. De même, dans l'ensemble **Z**, tous les éléments non nuls sont réguliers pour la multiplication, mais seuls 1 et -1 sont inversibles.

Parties stables. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit qu'une partie P de E est *stable* pour cette loi si, pour tout couple (x, y) d'éléments de P, $x \perp y$ appartient à P.

La restriction à $P \times P$ de l'application $(x, y) \mapsto x \perp y$ définit alors une loi de composition interne sur P, dite *loi induite* par la loi de composition $\perp$.

EXEMPLES

1. L'ensemble E, la partie vide de E, sont des parties stables de E.

2. L'ensemble des nombres pairs est une partie stable de **N** muni de l'addition; il n'en est pas de même de l'ensemble des nombres impairs.

2.2 Morphismes. Soient E et F deux ensembles munis de lois de composition internes, notées respectivement $\perp$ et $\top$. On dit qu'une application f de E dans F est un morphisme si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E,

$$f(x \perp y) = f(x) \top f(y) . \tag{1}$$

Les deux propriétés suivantes sont importantes :

1. L'image par f d'une partie stable P de E est une partie stable de F.
2. L'image réciproque par f d'une partie stable Q de F est une partie stable de E.

Assertion 1. Soit (u, v) un couple d'éléments de $f(P)$. Il existe un couple (x, y) d'éléments de P tel que $f(x) = u$ et $f(y) = v$.
Alors

$$u \top v = f(x) \top f(y) .$$

Puisque f est un morphisme, le second membre est égal à $f(x \perp y)$. Puisque P est stable, $x \perp y$ appartient à P, et $u \top v$ appartient donc à $f(P)$.

Assertion 2. Soit (x, y) un couple d'éléments de $f^{-1}(Q)$. Puisque f est un morphisme,

$$f(x \perp y) = f(x) \top f(y) .$$

Puisque Q est stable, le second membre appartient à Q, et $x \perp y$ appartient donc à $f^{-1}(Q)$.

Soient maintenant E, F et G trois ensembles munis de lois de composition internes, notées respectivement $\perp$, $\top$ et $*$, f un morphisme de E dans F et g un morphisme de F dans G. Alors l'application composée $g \circ f$ est un morphisme de E dans G.

Soit en effet (x, y) un couple d'éléments de E. Puisque f est un morphisme,

$$f(x \perp y) = f(x) \top f(y) .$$

Puisque g est un morphisme,

$$g[f(x) \top f(y)] = g[f(x)] * g[f(y)] ,$$

soit

$$(g \circ f)(x \perp y) = (g \circ f)(x) * (g \circ f)(y) ,$$

ce qu'il fallait prouver.

Un morphisme établit donc une ressemblance entre deux ensembles munis de lois de composition internes. Cette ressemblance est évidemment encore plus frappante — et plus utile — si elle est bijective : d'où l'intérêt de la définition suivante : Soient E et F deux ensembles munis de lois de composition internes, notées respectivement $\perp$ et $\top$. On dit qu'un morphisme f de E dans F est un *isomorphisme* de E sur F si f est inversible et si l'application réciproque de f est un morphisme de F sur E.

Si f est un isomorphisme de E sur F, f^{-1} est évidemment un isomorphisme de F sur E. C'est pourquoi, s'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que E et F sont *isomorphes.*

En fait, *tout morphisme bijectif de E sur F est un isomorphisme.*

Considérons en effet deux éléments x' et y' de F. Puisque f est inversible, il existe deux éléments x et y de E tels que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$, à savoir $x = f^{-1}(x')$, $y = f^{-1}(y')$. La relation (1) montre que

$$f(x \perp y) = f(x) \top f(y) = x' \top y' ,$$

soit, en appliquant f^{-1} aux deux membres :

$$x \perp y = f^{-1}(x') \perp f^{-1}(y') = f^{-1}(x' \top y') ,$$

ce qu'il fallait prouver.

Lorsque les ensembles E et F sont égaux et munis de la même loi, les morphismes de E dans F s'appellent *endomorphismes* de E, et les isomorphismes de E sur F, *automorphismes* de E.

EXEMPLE. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne. L'application identique de E est un automorphisme de E.

Enfin, on peut généraliser la notion de morphisme de la manière suivante :

Soient E et F deux ensembles munis chacun de plusieurs lois de composition internes. On suppose donnée une bijection φ de l'ensemble des lois de E sur l'ensemble des lois de F. On dit alors qu'une application f de E dans F est un morphisme de E dans F si, pour toute loi $\perp$ de E, c'est un morphisme de E muni de la loi $\perp$ dans F muni de la loi $\top$ associée à $\perp$ par l'application φ.

GROUPES

2.3 Groupes. Soit G un ensemble. On dit que G est muni d'une structure de groupe (ou encore que G est un groupe) si G est muni d'une loi de composition interne satisfaisant aux trois conditions suivantes :

— cette loi est associative;
— il existe un élément neutre;
— tout élément de G est symétrisable.

On dit qu'un groupe G est commutatif (*ou encore abélien*) *si la loi est commutative.*

On notera que tout élément d'un groupe est régulier.

EXEMPLES.

1. Avec cette terminologie, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, munis de l'addition, sont des groupes commutatifs. L'ensemble $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$, l'ensemble $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$, l'ensemble $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$, l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs, munis de la multiplication, sont des groupes commutatifs.

2. Soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble, muni de la différence symétrique. Alors $\mathscr{P}(E)$ est un groupe commutatif.

Montrons d'abord l'associativité de la différence symétrique (Fig. 2.1). La partie $P \triangle Q$ est constituée des éléments de E appartenant à une seule des deux parties P et Q; la partie $(P \triangle Q) \triangle R$ est constituée des éléments de E appartenant à une seule des trois parties P, Q et R, ou à ces trois parties à la fois; il en est de même de $P \triangle (Q \triangle R)$.

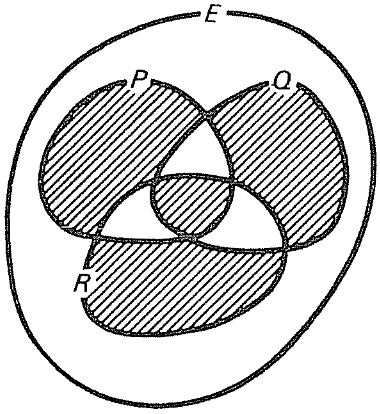


FIG. 2.1 Associativité de la différence symétrique.

Nous avons déjà vu que la différence symétrique est commutative, que la partie vide est élément neutre, et que tout élément P de $\mathscr{P}(E)$ est son propre symétrique. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$, muni de la différence symétrique, est donc un groupe commutatif.

3. On remarquera qu'un groupe n'est jamais vide, puisqu'il contient toujours l'élément neutre e.

Un ensemble à un élément e peut toujours être muni d'une structure de groupe, grâce à la loi composition interne $e \perp e = e$.

4. *Groupes à 2 éléments.* Un ensemble à deux éléments peut être muni d'une structure de groupe : l'un des éléments est l'élément neutre e; si l'autre élément est noté x, nécessairement x est son propre symétrique. Donc, en adoptant la notation multiplicative pour alléger les calculs :

$$e^2 = e, \quad ex = xe = x\,, \quad x^2 = e\,.$$

Il est d'usage de rassembler ces résultats en une table :

$$\begin{array}{c|cc} & e & x \\ \hline e & e & x \\ x & x & e \end{array}$$

le premier facteur figurant dans la colonne de gauche, le deuxième dans la ligne du haut, leur produit à l'intersection de la ligne du premier facteur et de la colonne du second.

On vérifie réciproquement que cette table définit une structure de groupe, et que ce groupe est commutatif.

5. *Groupes à 3 éléments.* Un ensemble à trois éléments peut être muni d'une structure de groupe : l'un des éléments est e; soit x un élément autre que e; montrons que x ne peut être son propre inverse. En effet, supposons par l'absurde que $x^2 = e$, et notons alors y le troisième élément du groupe. La relation $xy = e$ est impossible, car l'inverse de x est x lui-même; la relation $xy = x$ est impossible, car elle entraîne $y = e$. (Rappelons que dans un groupe, tout élément est régulier.) Enfin, la relation $xy = y$ est impossible, car elle entraîne $x = e$ (il n'y aurait donc que deux éléments). En conclusion, le groupe comporte nécessairement les éléments, e, x et x^2. D'où la table :

$$\begin{array}{c|ccc} & e & x & x^2 \\ \hline e & e & x & x^2 \\ x & x & x^2 & e \\ x^2 & x^2 & e & x \end{array}$$

On vérifie réciproquement que cette table définit une structure de groupe, et que ce groupe est commutatif.

6. *Groupes à 4 éléments.* Supposons d'abord qu'il existe un élément x de G qui ne soit pas son propre inverse, et montrons qu'alors x^3 est différent de e. Supposons en effet par l'absurde que $x^3 = e$, et notons y le quatrième élément du groupe. Comme précédemment, nous devons éliminer les cas

$$\begin{aligned} xy &= e\,, && \text{conduisant à } y = x^2\,, \\ xy &= x\,, && \text{conduisant à } y = e\,, \\ xy &= x^2\,, && \text{conduisant à } y = x\,, \\ xy &= y\,, && \text{conduisant à } x = e\,. \end{aligned}$$

La table est nécessairement :

	e	x	x^2	x^3
e	e	x	x^2	x^3
x	x	x^2	x^3	e
x^2	x^2	x^3	e	x
x^3	x^3	e	x	x^2

Réciproquement, cette table définit manifestement une structure de groupe commutatif.

Supposons maintenant que tout élément de G soit son propre inverse. La table est nécessairement :

	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

Elle peut se résumer ainsi : le produit de deux éléments non neutres est égal au troisième élément non neutre.

On remarquera de ce fait que cette table ne se ramène pas à la précédente par un changement de notation.

Réciproquement, on vérifie encore que cette table définit une structure de groupe commutatif, appelé *groupe de Klein.*

En résumé, il existe deux lois de groupe sur les ensembles à quatre éléments, et tous les groupes à quatre éléments sont commutatifs.

7. *Groupes de permutations.* L'ensemble des permutations d'un ensemble E (c'est-à-dire l'ensemble des bijections de E sur lui-même) est un groupe pour la loi de composition des applications, appelé *groupe symétrique* de E et noté $\mathfrak{S}_E$. Le groupe symétrique de l'intervalle $[1, n]$ de $\mathbf{N}$ se note $\mathfrak{S}_n$.

Lorsque l'ensemble E est fini, on note une permutation σ en écrivant sur une ligne les éléments de E, et en dessous leurs images par σ.

Lorsque E a un seul élément a, le groupe des permutations de E se réduit à l'application identique de E :

$$I_E = \begin{Bmatrix} a \\ a \end{Bmatrix}.$$

Lorsque E a deux éléments a et b, il y a deux permutations,

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ a & b \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} a & b \\ b & a \end{Bmatrix},$$

constituant un groupe à deux éléments.

Lorsque E a trois éléments a, b, c, il y a six permutations :

$$\sigma_1 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{Bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{Bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{Bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{Bmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{Bmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{Bmatrix}.$$

Leur table de multiplication est la suivante :

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_1	σ_5	σ_6	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_6	σ_5
σ_4	σ_4	σ_3	σ_6	σ_5	σ_1	σ_2
σ_5	σ_5	σ_6	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
σ_6	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1

On constate que ce groupe n'est pas commutatif, puisque, par exemple, $\sigma_6\sigma_2 = \sigma_5$, alors que $\sigma_2\sigma_6 = \sigma_4$.

On notera que, dans chacune des tables précédentes, tout élément du groupe figure une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, ce qui permet de contrôler les résultats.

8. *Groupe des classes résiduelles modulo* 2π. Soient $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ l'ensemble des classes résiduelles modulo 2π, θ, θ', φ et φ' quatre nombres réels. Si $\theta \equiv \theta'$ (mod. 2π) et $\varphi \equiv \varphi'$ (mod. 2π), il est immédiat que

$$\theta+\varphi \equiv \theta'+\varphi' \qquad (\text{mod. } 2\pi)\,.$$

On peut donc définir une addition sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de la manière suivante :

Soient α et β deux éléments de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$; on appelle somme de α et de β, et on note $\alpha+\beta$, la classe de la somme de deux représentants quelconques de α et de β. L'ensemble $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est alors muni d'une structure de groupe commutatif.

En effet, l'associativité et la commutativité résultent aussitôt de l'associativité et de la commutativité de l'addition sur $\mathbf{R}$. La classe de 0 est élément neutre, et la classe de $-\theta$ est l'opposé de la classe de θ.

2.4 Sous-groupes. Soient G un groupe et G' une partie de G. On dit que G' est un *sous-groupe* de G si G' est stable et si, munie de la loi de composition induite par celle de G, G' est un groupe. En fait, pour que G' soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que :

— la partie G' soit stable;
— l'élément neutre e de G appartienne à G';
— le symétrique dans G de tout élément de G' appartienne à G'.

Supposons la loi de G notée multiplicativement. Soit e l'élément neutre de G.

Si G' est un sous-groupe de G, G' est une partie stable de G. Soit e' l'élément neutre de G'. Alors $e'e' = e'$; puisque e' appartient à G, $e'e = e'$. L'élément e' étant régulier, $e' = e$, ce qui montre que e appartient à G'. Enfin, la loi de G étant associative, le symétrique dans G d'un élément x de G' est unique, et donc égal au symétrique de x dans G'; il appartient donc à G'.

Réciproquement, soit G' une partie de G satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Les trois axiomes des groupes sont évidemment vérifiés par G' munie de la loi induite par celle de G.

On peut caractériser encore plus simplement les sous-groupes d'un groupe G.

Pour qu'une partie non vide G' de G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que, pour tout couple (x, y) d'éléments de G', le composé de x et du symétrique de y appartienne à G'. (En notation multiplicative, xy^{-1} appartient à G'; en notation additive, $x-y$ appartient à G'.)

En effet, si G' est un sous-groupe de G, le symétrique y^{-1} d'un élément y de G' appartient à G'; le composé xy^{-1} appartient encore à G', puisque G' est stable.

Réciproquement, puisque G' est non vide, il existe au moins un élément x_0 de G'. D'après l'hypothèse, $e = x_0 x_0^{-1}$ appartient à G'. Pour tout élément y de G', $y^{-1} = ey^{-1}$ appartient à G'. Enfin, pour tout couple (x, y) d'éléments de G', $xy = x(y^{-1})^{-1}$ appartient à G', ce qui montre que G' est stable. La proposition précédente s'applique donc à G'.

EXEMPLES

1. Pour tout groupe G, l'ensemble $\{e\}$ et G tout entier sont des sous-groupes de G.

2. La partie $\{e, x\}$ est un sous-groupe du groupe de Klein.

3. La partie $\{\sigma_1, \sigma_4, \sigma_5\}$ est un sous-groupe du groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments.

4. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne. Les automorphismes de E constituent un sous-groupe du groupe des permutations de E.

2.5 Morphismes de groupes. Soient G et H deux groupes notés multiplicativement. Un morphisme f de G dans H est une application de G dans H telle que, pour tout couple (x, y) d'éléments de G,

$$f(xy) = f(x) f(y) .$$

Alors :

1. L'image par f de l'élément neutre e de G n'est autre que l'élément neutre e' de H.

L'image $f(G')$ d'un sous-groupe G' de G par f est un sous-groupe de H. En particulier, l'image de G par f est un sous-groupe de H, appelé image de f, et noté Im (f).

2. L'image réciproque $f^{-1}(H')$ d'un sous-groupe H' de H est un sous-groupe de G. En particulier, l'image réciproque de $\{e'\}$ est un sous-groupe de G, appelé noyau de f, et noté Ker (f).

3. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injectif est que son noyau soit réduit à l'élément neutre de G.

Assertion 1. Puisque e est l'élément neutre de G,

$$f(e^2) = f(e)f(e) = f(e);$$

puisque e' est l'élément neutre de $H, f(e)\ e' = f(e)$. L'élément $f(e)$ étant régulier, $f(e) = e'$.

Soit G' un sous-groupe de G. L'image de G' par le morphisme f est une partie stable de H, contenant l'élément neutre de H. Pour tout élément u de $f(G')$, il existe un élément x de G' tel que $f(x) = u$. Alors

$$f(x^{-1})f(x) = f(x)f(x^{-1}) = f(e) = e'.$$

Puisque x^{-1} appartient à G', $f(x^{-1})$ appartient à $f(G')$, et le symétrique de u appartient à $f(G')$. Par suite, $f(G')$ est un sous-groupe de H.

Assertion 2. L'image réciproque par f d'un sous-groupe H' de H est une partie stable de G, contenant e, d'après l'assertion 1. Pour tout élément x de $f^{-1}(H')$,

$$f(x)f(x^{-1}) = f(e) = e'.$$

Puisque H' est un sous-groupe de $H, f(x^{-1})$ appartient à H', et x^{-1} appartient à $f^{-1}(H')$. Il en découle que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Assertion 3. L'image réciproque de $\{e'\}$ par f contient e. Si f est injectif, $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$. Soient x et y deux éléments de G tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$f(xy^{-1}) = f(x)\,[f(y)]^{-1} = e'.$$

Donc xy^{-1} appartient à $\mathrm{Ker}(f)$. L'hypothèse entraîne $xy^{-1} = e$, et donc $x = y$.

EXEMPLES

1. L'application $x \mapsto e^x$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$, muni de l'addition, sur $\mathbf{R}_+^*$, muni de la multiplication.

L'application réciproque $y \mapsto \ln y$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$, muni de la multiplication, sur $\mathbf{R}$, muni de l'addition. Cet isomorphisme est à l'origine du calcul logarithmique et de la règle à calcul.

2. Soit a un nombre réel non nul. L'application $x \mapsto ax$ est un automorphisme de $\mathbf{R}$ muni de l'addition.

3. Tous les groupes à un élément sont isomorphes; il en est de même pour les groupes à deux éléments, et pour les groupes à trois éléments.

4. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$, muni de la différence symétrique, est isomorphe au groupe de Klein. En effet, la différence symétrique de deux parties non vides de E est la troisième partie non vide de E.

ANNEAUX

2.6 Anneaux. Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées $\perp$ et $\top$. On dit que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $\perp$ si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E,

$$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$$

et

$$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x) .$$

Remarquons que si la loi $\top$ est commutative, ces deux conditions sont équivalentes.

EXEMPLES

1. Sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, l'intersection est distributive par rapport à la réunion, et la réunion est distributive par rapport à l'intersection.

2. Sur les ensembles **N**, **Z**, **Q**, **R** et **C**, la multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tout triplet (x, y, z),

$$x(y+z) = xy+xz .$$

Remarquons que dans le cas de **Z**, **Q**, **R** et **C**, l'addition définit une structure de groupe. Plus généralement, étant donné un ensemble A, on dit que A est muni d'une structure d'*anneau* (ou encore que A est un anneau) si A est muni de deux lois de composition internes, la première étant une loi de groupe commutatif, la deuxième étant associative et distributive par rapport à la première.

On dit que l'anneau A est commutatif si la deuxième loi est commutative. On dit que l'anneau A est *unitaire* si la deuxième loi possède un élément neutre; celui-ci est appelé élément unité de A, et souvent noté 1.

EXEMPLES

1. Avec cette terminologie, **Z**, **Q**, **R** et **C** sont des anneaux commutatifs unitaires.

2. *Anneau des parties d'un ensemble.* Soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E, muni de la différence symétrique et de l'intersection. Alors $\mathscr{P}(E)$ est un anneau commutatif unitaire.

Nous avons déjà vu que la différence symétrique est une loi de groupe commutatif, que l'intersection est associative et commutative, et que E est élément neutre pour l'intersection. Il reste donc à établir la distributivité de l'intersection par rapport à la différence symétrique (Fig. 2.2). Calculons à cet effet

$$(P \cap R) \triangle (Q \cap R) = [(P \cap R) \cup (Q \cap R)] \cap [(\overline{P \cap R}) \cup (\overline{Q \cap R})]$$
$$= [(P \cup Q) \cap R] \cap [\bar{P} \cup \bar{R} \cup \bar{Q}].$$

Or,

$$\bar{P} \cup \bar{R} \cup \bar{Q} = (\bar{P} \cup \bar{Q}) \cup \bar{R},$$

donc

$$(P \cap R) \triangle (Q \cap R) = (P \triangle Q) \cap R,$$

ce qu'il fallait prouver.

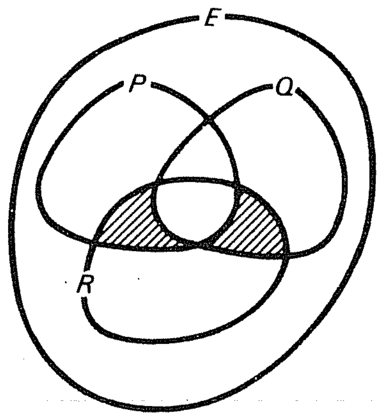


FIG. 2.2 Distributivité de l'intersection par rapport à la différence symétrique.

3. *Anneau des classes résiduelles modulo n.* Soient n un entier strictement supérieur à 1, et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'ensemble des classes résiduelles modulo n. Il est immédiat que si x est congru à x' et si y est congru à y', alors $x+y$ est congru à $x'+y'$, et xy est congru à $x'y'$.

On peut alors définir une addition et une multiplication sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de la manière suivante : soient α et β deux éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, x un représentant de α et y un représentant de β. On appelle somme de α et β, et on note $\alpha+\beta$, la classe de $x+y$. (Cette classe ne dépend en effet que de α et β, et non des représentants choisis.) De même, on appelle produit de α et β, et on note $\alpha\beta$, la classe de xy.

L'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est alors muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire, l'élément unité étant la classe, notée $\dot{1}$, de 1.

Les vérifications sont toutes triviales. Établissons par exemple la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : soient α, β et γ trois éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, x, y et z des représentants de α, β et γ. Alors $\alpha(\beta+\gamma)$ est par définition la classe de $x(y+z)$, $\alpha\beta$ est la classe de xy, et $\alpha\gamma$ la classe de xz. Il suffit donc de montrer que $x(y+z)$ est congru à $xy+xz$, ce qui est évidemment vérifié, puisque ces deux éléments de $\mathbf{Z}$ sont égaux.

4. *Anneau des applications d'un ensemble dans un anneau.* Soient E un ensemble et A un anneau commutatif unitaire. L'ensemble, noté $\mathscr{F}(E, A)$, des applications de E dans A est lui-même un anneau commutatif unitaire, l'addition et la multiplication étant définies de la manière suivante :

— la somme de deux applications f et g est l'application, notée $f+g$, qui à tout élément x de E associe l'élément $f(x)+g(x)$ de A;

— le produit de f et de g est l'application, notée fg, qui à x associe $f(x)\,g(x)$.

L'élément neutre pour l'addition est l'application nulle (c'est-à-dire l'application constante prenant pour tout x la valeur 0); l'élément neutre pour la multiplication est l'application constante prenant pour tout x la valeur de l'élément unité de A.

Les vérifications sont encore triviales. Étudions cette fois l'associativité de la multiplication, par exemple; soient pour cela f, g et h trois applications de E dans A. Alors l'application $(fg)\,h$ associe à x la valeur $[f(x)\,g(x)]\,h(x)$, tandis que l'application $f(gh)$ associe à x la valeur $f(x)\,[g(x)\,h(x)]$; ces deux éléments de A sont égaux, puisque la multiplication dans A est associative. Il s'ensuit que les applications $(fg)\,h$ et $f(gh)$, prenant même valeur pour tout élément x de E, sont égales, ce qu'il fallait prouver.

En particulier, l'ensemble des suites d'éléments de l'anneau A est un anneau commutatif unitaire (c'est le cas où l'ensemble E est égal à $\mathbf{N}$); l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles est un anneau commutatif unitaire (c'est le cas où $E = A = \mathbf{R}$).

Règles de calcul dans les anneaux. Nous allons généraliser les règles de calcul bien connues dans le cas de l'anneau des entiers rationnels.

Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de A,

$$x(y-z) = xy-xz\,.$$

En effet, d'après la distributivité,

$$x(y-z) + xz = x[(y-z) + z] = xy\,;$$

il suffit alors d'ajouter $-xz$ aux deux membres pour obtenir le résultat annoncé.

On démontre de même que

$$(y-z)\,x = yx-zx\,.$$

Prenons en particulier $z = y$; nous voyons ainsi que, pour tout élément x de A,

$$x\,.\,0 = 0\,.\,x = 0\,.$$

Prenons maintenant $y = 0$; alors

$$x(-z) = -(xz) \qquad \text{et} \qquad (-z)\,x = -(zx)\,.$$

En changeant enfin x en $-x$, nous trouvons que

$$(-x)\,(-z) = xz\,.$$

Groupe des éléments inversibles d'un anneau unitaire. Soit A un anneau unitaire. L'ensemble G des éléments inversibles de A est une partie stable pour la multiplication. Muni de la loi induite, G est un groupe.

En effet, G contient évidemment l'élément unité e de A. Soient x et y deux éléments de G; alors

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = (xy)(y^{-1}x^{-1}) = e\,,$$

ce qui montre que xy appartient encore à G. Enfin, l'inverse d'un élément inversible est un élément inversible.

2.7 Sous-anneaux. Soient maintenant A un anneau et A' une partie de A. On dit que A' est un sous-anneau de A si A' est stable pour les deux lois de A et si, munie des lois de composition induites par celles de A, A' est un anneau.

(Lorsque l'anneau A est unitaire, on dit qu'un sous-anneau A' de A est *unitaire* si l'élément unité de A appartient à A'.) En fait, pour qu'une partie non vide A' de A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que, pour tout couple (x, y) d'éléments de A', $x-y$ et xy appartiennent à A'.

Cela résulte aussitôt de la caractérisation des sous-groupes.

2.8 Morphismes d'anneaux. Soient A et B deux anneaux. Un morphisme f de A dans B est une application de A dans B telle que, pour tout couple (x, y) d'éléments de A,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et

$$f(xy) = f(x)\,f(y)\,.$$

L'image $f(A')$ d'un sous-anneau A' de A par f est un sous-anneau de B. En particulier, l'image de A par f est un sous-anneau de B, appelé aussi image de f, et noté $\mathrm{Im}(f)$.

Nous savons en effet que l'image d'un sous-groupe additif par un morphisme est un sous-groupe additif (voir page 36) et que l'image d'une partie stable pour la multiplication est une partie stable (voir page 29).

L'image réciproque $f^{-1}(B')$ d'un sous-anneau B' de B est un sous-anneau de A. En particulier, l'image réciproque de $\{0\}$ est un sous-anneau de A, appelé noyau de f, et noté $\mathrm{Ker}\,(f)$.

D'après ces mêmes pages, l'image réciproque d'un sous-groupe additif est un sous-groupe additif, et l'image réciproque d'une partie stable est une partie stable.

Soient maintenant A et B deux anneaux unitaires. On dit qu'une application f de A dans B est un *morphisme d'anneaux unitaires* si f est un morphisme d'anneaux transformant l'élément unité de A en l'élément unité de B. (Cette propriété n'est pas automatiquement vérifiée. Par exemple, l'application constante et égale à 0 est un endomorphisme de l'anneau $\mathbf{Z}$, qui ne transforme pas 1 en 1 mais en 0.)

2.9 Idéaux d'un anneau commutatif. Soient A un anneau commutatif et $\mathfrak{I}$ une partie de A. On dit que $\mathfrak{I}$ est un idéal de A si $\mathfrak{I}$ est un sous-groupe additif de A tel que, pour tout élément x de A et pour tout élément y de $\mathfrak{I}$, l'élément xy appartienne à $\mathfrak{I}$.

En particulier, tout idéal de A est un sous-anneau de A.

EXEMPLES

1. Soient A et B deux anneaux commutatifs et f un morphisme de A dans B. Le noyau de f est un idéal de A.

En effet, le noyau de f est un sous-groupe additif de A. De plus, pour tout élément x de A et pour tout élément y de Ker (f),

$$f(xy) = f(x)f(y) = 0\,,$$

ce qui montre que xy appartient à Ker (f).

2. Soit A un anneau commutatif. L'ensemble $\{0\}$ et A tout entier sont des idéaux de A.

3. Soient A un anneau commutatif unitaire et a un élément de A. L'ensemble des éléments de A de la forme xa, où x appartient à A, est un idéal de A.

Remarque. Soit A un anneau commutatif unitaire. Tout idéal de A contenant l'élément unité de A est égal à A tout entier.

2.10 Binôme de Newton. Soient A un anneau, a et b deux éléments permutables de A, et n un entier naturel non nul. L'élément $(a+b)^n$ peut s'exprimer sous la forme, dite formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1} b + \dots + C_n^p\, a^{n-p} b^p + \dots + C_n^n b^n\,, \tag{1}$$

où les coefficients C_n^p sont des entiers naturels, appelés *coefficients binomiaux*, ne dépendant que de n et de p. Ces coefficients sont définis par les formules de récurrence :

$$C_1^0 = C_1^1 = 1\,, \tag{2}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1\,, \tag{3}$$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}\,, \qquad \text{où} \qquad p \in [1,\, n-1]\,. \tag{4}$$

Établissons la relation (1) par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, il s'agit d'une évidence. Soit donc n un entier supérieur à 2; supposons la relation (1) établie pour l'entier $n-1$:

$$(a+b)^{n-1} = C_{n-1}^0\, a^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{p-1}\, a^{n-p} b^{p-1} + C_{n-1}^p\, a^{n-p-1} b^p + \dots + C_{n-1}^{n-1} b^{n-1}\,.$$

Multiplions les deux membres par $a+b$; en regroupant les termes en $a^{n-p}b^p$, nous obtenons la relation (4), ainsi que les relations (2) et (3).

Les relations (2), (3) et (4) permettent de calculer aisément les coefficients binomiaux pour tout couple donné de valeurs numériques pour n et p. Il est d'usage de disposer les coefficients binomiaux dans un tableau triangulaire, appelé *triangle de Pascal*; le coefficient C_n^p est situé à l'intersection de la n-ième ligne et de la $(p+1)$-ième colonne. La formule (4) s'exprime en disant que chacun des nombres du tableau est la somme de l'élément situé juste au-dessus et de l'élément situé au-dessus et à gauche.

Ainsi, pour n inférieur à 7,

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1.

Nous pouvons de la sorte écrire la formule du binôme pour n inférieur à 7 :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\\
(a+b)^7 &= a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7.
\end{aligned}
$$

Remarque. La formule du binôme s'applique à tout couple d'éléments d'un anneau commutatif; elle s'applique aussi au couple constitué d'un élément quelconque et de l'élément unité d'un anneau unitaire non nécessairement commutatif. Ce cas pourra être utile au chapitre 7 pour le calcul des puissances n-ièmes de certaines matrices carrées.

2.11 Suites arithmétiques. Soient A un anneau commutatif et r un élément de A. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite (u_n) d'éléments de A satisfaisant à la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + r.$$

Le terme général s'exprime donc en fonction du premier terme u_0 par la relation

$$u_n = u_0 + nr.$$

La formule du binôme va nous permettre de calculer la somme, la somme des carrés, la somme des cubes, des n premiers termes d'une suite arithmétique.

Écrivons en effet

$$
\begin{aligned}
(u_0+r)^2 &= u_0^2+2u_0r+r^2\\
(u_1+r)^2 &= u_1^2+2u_1r+r^2\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
(u_{n-1}+r)^2 &= u_{n-1}^2+2u_{n-1}r+r^2.
\end{aligned}
$$

En ajoutant membre à membre, nous obtenons la relation

$$2r(u_0+u_1+\dots+u_{n-1}) = (u_{n-1}+r)^2-u_0^2-nr^2 = 2nru_0+n(n-1)r^2.$$

Posons

$$S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

Alors :

$$\boxed{S_1 = \frac{n}{2}[2u_0 + (n-1)r].}$$

De même :

$$(u_0+r)^3 = u_0^3 + 3u_0^2 r + 3u_0 r^2 + r^3$$
$$(u_1+r)^3 = u_1^3 + 3u_1^2 r + 3u_1 r^2 + r^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(u_{n-1}+r)^3 = u_{n-1}^3 + 3u_{n-1}^2 r + 3u_{n-1} r^2 + r^3.$$

et :

$$\begin{aligned} 3r(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2) + 3r^2 S_1 &= (u_0+nr)^3 - u_0^3 - nr^3 \\ &= 3nru_0^2 + 3n^2r^2u_0 + n(n^2-1)r^3. \end{aligned}$$

Posons

$$S_2 = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2.$$

Alors :

$$\boxed{S_2 = \frac{n}{6}[6u_0^2 + 6(n-1)\,ru_0 + (2n^2-3n+1)\,r^2].}$$

Ces formules s'appliquent en particulier aux entiers naturels compris entre 1 et n, lorsque $u_0 = 1$ et que $r = 1$. Ainsi :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.12 Corps. Soit A un anneau. On dit qu'un élément non nul a de A est un *diviseur de zéro* (bilatère) s'il existe un élément non nul b de A tel que

$$ab = ba = 0.$$

Exemple. Dans l'anneau $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ des classes résiduelles modulo 6, les classes de 2 et de 3 sont des diviseurs de zéro; en effet,

$$\dot{2}.\dot{3} = \dot{3}.\dot{2} = \dot{6} = \dot{0}.$$

Remarquons que si un anneau unitaire A n'est pas réduit à $\{0\}$, l'élément 0 n'est pas inversible.

En effet, pour tout élément x de A,

$$0 . x = x . 0 = 0 .$$

Donc, si 0 est inversible, l'élément unité est nécessairement égal à 0, auquel cas tout élément de A est égal à 0.

Mais on ne peut conclure *a priori* à l'inversibilité des éléments non nuls. Par exemple, dans l'anneau **Z** des entiers rationnels, seuls 1 et -1 sont inversibles. Ce qui conduit à poser la définition suivante :

On dit qu'un anneau unitaire K est un *corps* s'il n'est pas réduit à $\{0\}$, et si tout élément non nul de K est inversible.

Autrement dit, un corps K est un anneau unitaire dont le groupe des éléments inversibles est égal à $K^* = K - \{0\}$.

Il n'y a donc pas de diviseur de zéro dans un corps.

Bien entendu, on dit qu'un corps est commutatif si la multiplication l'est.

EXEMPLES. Les anneaux **Q**, **R** et **C** sont des corps commutatifs; en revanche, l'anneau **Z** n'est pas un corps.

Sous-corps. Soient K un corps et K' une partie de K. On dit que K' est un sous-corps de K si K' est stable pour les deux lois de K et si, munie des lois induites par celles de K, K' est un corps.

En fait, pour qu'une partie K' de K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que K' soit un sous-anneau de K contenant l'élément unité de K et que l'inverse dans K de tout élément non nul de K' appartienne à K'.

Cela résulte aussitôt des caractérisations des sous-groupes et sous-anneaux.

EXEMPLES

1. L'ensemble **Q** est un sous-corps du corps **R** des nombres réels et du corps **C** des nombres complexes.

2. L'ensemble **R** est un sous-corps de **C**.

3. L'ensemble **Z** est un sous-anneau de **Q**, mais ce n'est pas un sous-corps de **Q**.

Idéaux d'un corps commutatif. Soit K un corps commutatif. L'ensemble $\{0\}$ et l'ensemble K sont les seuls idéaux de K.

En effet, soit $\mathfrak{J}$ un idéal de K non réduit à $\{0\}$. Il existe donc un élément non nul x de $\mathfrak{J}$. Puisque K est un corps, x est inversible; puisque $\mathfrak{J}$ est un idéal, $x^{-1}x$ appartient à $\mathfrak{J}$. L'idéal $\mathfrak{J}$, contenant l'élément unité de K, est égal à K tout entier.

2.13 Suites géométriques. Soient K un corps commutatif et r un élément de K. On appelle suite géométrique de raison r toute suite (u_n) d'éléments de K satisfaisant à la relation de récurrence.

$$u_n = u_{n-1} r .$$

Le terme général s'exprime donc en fonction du premier terme u_0 par la relation

$$u_n = u_0 r^n.$$

La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ des premiers termes d'une suite géométrique est égale à

$$nu_0 \qquad \text{si } r = 1,$$

$$u_0 \frac{1-r^n}{1-r} \qquad \text{si } r \neq 1.$$

Le premier cas est trivial; dans le deuxième cas, il suffit de vérifier que

$$(1-r)(1 + r + \dots + r^{n-1}) = 1 - r^n,$$

et d'utiliser le fait que l'élément $1-r$, étant non nul, est inversible.

EXERCICES

2.1 On considère un ensemble $E = \{a, b, c\}$ et l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E. Combien $\mathscr{P}(E)$ comporte-t-il d'éléments?
Dresser la table de l'opération $\cup$. Y a-t-il un élément neutre? Quels éléments admettent un symétrique?

2.2 Dans l'ensemble des nombres réels, on définit une loi de composition interne par $a * b = a$.
Est-elle associative? Existe-t-il un élément neutre? Est-elle commutative?

2.3 Même problème avec $a * b = a^2 + b^2$.

2.4 Même problème avec, dans $\mathbf{R}_+$, $a * b = \sqrt{ab}$.

2.5 Dans l'ensemble $\mathbf{Z}$, on définit une loi de composition interne par $a * b = 3a + b$.
Est-elle associative? Existe-t-il un élément neutre? Est-elle commutative?

2.6 Dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, on définit une loi de composition interne par $a * b = (a+b)/2$.
Est-elle associative ? commutative ? Existe-t-il un élément neutre ? Montrer que, pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels,

$$a * (b * c) = (a * b) * (a * c).$$

2.7 Dans l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs, on définit une loi de composition interne par $a * b = a + 1/b$.
Est-elle associative? commutative?

2.8 Dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, on définit une loi de composition interne par

$$a * b = a + b + ab\,.$$

1° Est-elle commutative? associative? Existe-t-il un élément neutre? Tout réel admet-il un symétrique?

2° Comparer $a * (b + c)$ et $(a * b) + (a * c)$.

3° Comparer $a * (bc)$ et $(a * b)(a * c)$,

2.9 Sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, on définit deux lois de composition internes, notées $*$ et $\circ$, par

$$a * b = a + 2b \qquad \text{et} \qquad a \circ b = 2ab\,.$$

Sont-elles commutatives? associatives?
Établir que la deuxième loi (notée $\circ$) est distributive par rapport à la première (notée $*$).

2.10 On définit dans l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs une loi de composition interne par

$$a * b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\,.$$

Est-elle commutative? associative? Existe-t-il un élément neutre?

2.11 On définit dans l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des réels strictement positifs une loi de composition interne, notée $*$, par

$$a * b = x \quad \text{tel que} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Est-elle commutative? associative?
Former $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$. Conclusion?

2.12 On définit sur l'ensemble $\mathbf{R}_+$ des nombres réels positifs la loi de composition interne, notée $*$, qui associe à deux de ses éléments a et b le plus grand de ces deux nombres.
Cette loi est-elle commutative? associative?
Existe-t-il un élément neutre?
On définit, de même, la loi, notée $\circ$, qui associe à deux éléments a et b le plus petit de ces deux nombres.
Cette loi est-elle commutative? associative?
Existe-t-il un élément neutre?
Vérifier que chacune de ces lois est distributive par rapport à l'autre, c'est-à-dire que

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$$

et

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

2.13 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition associative, avec un élément neutre e. Montrer que la relation définie par

$$a \mathcal{R} b \quad \text{s'il existe un élément inversible } s \text{ tel que } as = sb$$

est une relation d'équivalence.

2.14 Montrer que si, dans un groupe, tout élément est son propre symétrique, le groupe est commutatif.

2.15 Montrer que si, dans un groupe, quels que soient les éléments a et b,

$$(ab)^2 = a^2 b^2,$$

le groupe est commutatif.

2.16 Soit A un anneau. On suppose que tout élément x est tel que $x^2 = x$. Montrer que A est commutatif.

2.17 On définit sur l'ensemble $\mathbf{R}^2$ deux opérations $*$ et $\circ$ par

$$(a, b) * (a', b') = (a + a', b + b'),$$
$$(a, b) \circ (a', b') = (0, bb').$$

$\mathbf{R}^2$ muni de ces opérations est-il un corps?

CHAPITRE 3

LES NOMBRES RÉELS

3.1 Nombres entiers naturels. C'est à partir de l'ensemble des entiers naturels que les mathématiciens construisent tous les ensembles de nombres qui leur sont nécessaires : ils savent même construire cet ensemble à partir de la théorie des ensembles, par exemple en posant

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{\varnothing\} = 0 \cup \{0\}$$
$$2 = 1 \cup \{1\}$$
$$3 = 2 \cup \{2\}$$

et ainsi de suite. Toute la difficulté repose bien entendu dans cet « ainsi de suite », mais ce n'est point ici notre propos.

Pour nous, l'ensemble des entiers naturels est un instrument, l'instrument de ce qui se compte (par opposition à ce qui se pèse, ou se mesure). Cette dualité se retrouve au niveau des machines :

— machines numériques : utilisant des entiers (exemples : le boulier, calculateurs électroniques de poche ou de bureau, ordinateurs);

— machines analogiques : utilisant des grandeurs continues (exemples : la règle à calculs, calculateurs analogiques).

Soit $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels.

a) *Opérations*

A deux entiers naturels a et b, on sait associer leur somme, $a+b$ et leur produit ab par deux opérations appelées respectivement addition et multiplication jouissant des propriétés suivantes :

- Quels que soient les entiers a, b, c,

$$a+(b+c) = (a+b)+c\,,$$
$$a(bc) = (ab)\,c\,.$$

L'addition et la multiplication sont associatives.

- Quels que soient les entiers a et b,

$$a+b = b+a\,,$$
$$ab = ba\,.$$

L'addition et la multiplication sont commutatives.

- Quel que soit l'entier a,

$$a+0 = a\,,$$
$$a\,.\,1 = a\,.$$

0 est l'élément neutre pour l'addition, et 1 est l'élément neutre pour la multiplication.

- Quels que soient les entiers a, b, c :

$$a(b+c) = ab+ac\,.$$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

b) *Relation d'ordre*

La relation $a \leqslant b$ est une relation d'ordre : en fait elle est à l'origine du choix de l'expression « relation d'ordre » pour désigner les relations

— réflexives :

pour tout entier a, $\quad a \leqslant a$

— transitives :

pour tous entiers a, b, c,

$a \leqslant b \quad$ et $\quad b \leqslant c \quad$ entraînent $\quad a \leqslant c$

— et antisymétriques :

$a \leqslant b \quad$ et $\quad b \leqslant a \quad$ entraînent $\quad a = b\,.$

Notons en outre que, pour tout entier naturel p, la relation $a \leqslant b$ entraîne les relations

$$a+p \leqslant b+p\,,$$
$$ap \leqslant bp\,.$$

En outre, cette relation est une relation d'ordre total : quels que soient les entiers naturels a et b, l'une des deux relations

$a \leqslant b \quad$ ou $\quad b \leqslant a \quad$ est satisfaite.

Enfin, si $a \leqslant b$, il existe un entier c unique, noté $b-a$, et tel que

$$a+c = b\,.$$

3.2 Raisonnement par récurrence

a) *Propriétés héréditaires*

Il existe des propriétés dont l'énoncé contient un entier n non précisé, par exemple :

n^2-n n'est pas un nombre premier,

n^2 ne divise pas $2^{n-1}-1$.

Une telle propriété est dite héréditaire s'il suffit qu'elle soit vraie pour un entier n pour qu'elle soit vraie pour le suivant.

EXEMPLES

1. 3 divise $4^n - 1$ est une propriété héréditaire; en effet, si l'on suppose que

$$4^n - 1 = 3k,$$

alors :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4(4^n - 1) + 3 \\ &= 4(3k) + 3 \\ &= 3(4k+1), \end{aligned}$$

ce qui montre que $4^{n+1} - 1$ est aussi divisible par 3.

2. 3 divise $4^n + 1$ est une propriété héréditaire;
en effet, si l'on suppose que

$$4^n + 1 = 3k,$$

alors

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 1 &= 4(4^n + 1) - 3 \\ &= 4(3k) - 3 \\ &= 3(4k-1), \end{aligned}$$

ce qui montre que $4^{n+1} + 1$ est aussi divisible par 3.

b) *Axiome de récurrence*

Si une propriété héréditaire est vraie pour un entier A particulier, elle est vraie pour tout entier supérieur à A.

Assez souvent $A = 0$, en sorte que la propriété est vraie pour tout entier.

Le raisonnement par récurrence consiste donc :

a) à établir qu'une propriété est héréditaire;

b) à montrer qu'elle est vraie pour un entier A particulier.

EXEMPLES.

1. 3 divise $4^n - 1$ est une propriété héréditaire vraie pour $n = 0$, car alors $4^n - 1 = 0$. Cette propriété est donc vraie pour tout entier n.

2. 3 divise $4^n + 1$ n'est pas vraie pour $n = 0$, ni $n = 1$, ni $n = 2$ ... Un raisonnement direct montre d'ailleurs que cette propriété n'est vraie pour aucun entier n.

Cet exemple rappelle qu'une propriété héréditaire peut parfaitement être fausse.

3.3 Systèmes de numération. Considérons un nombre, écrit sous sa forme usuelle, par exemple 1974. Le dernier chiffre à droite, 4, représente des « unités simples »; le précédent, 7, représente des dizaines; le précédent, 9, des centaines (c'est-à-dire des dizaines de dizaines); le précédent 1, représente des milliers (c'est-à-dire des dizaines de centaines).

Ainsi :

$$1974 = 4 + 7 \times 10 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^3.$$

On dit que le nombre est écrit en base 10.

La base 10 n'est pas la seule utilisée : tout entier supérieur à 2 peut être utilisé comme base; 2 lui-même est très employé en calcul électronique. Ce système à base 2 est dit aussi système binaire.

C'est le théorème suivant qui montre la possibilité d'utiliser comme base tout entier supérieur à 2.

Soit p un entier supérieur à 2. Tout nombre entier naturel a s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$a = \sum_{q=0}^{+\infty} d_q p^q = d_0 p^0 + d_1 p^1 + d_2 p^2 + \dots, \tag{1}$$

où, pour tout entier naturel q, d_q est un entier appartenant à l'intervalle $[0, p-1]$, et où l'ensemble des entiers naturels q tels que d_q soit non nul est fini.

La relation (1) porte le nom de décomposition de a dans la base p.

Unicité de la décomposition. Supposons par l'absurde qu'il existe deux décompositions distinctes d'un entier a dans la base p :

$$\begin{aligned} a &= \sum_{q=0}^{+\infty} d_q p^q = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} d'_q p^q = d'_0 + d'_1 p + d'_2 p^2 + \dots \end{aligned}$$

Désignons par m_1 et m_2 le plus grand et le plus petit des entiers q tels que $d'_q \neq d_q$. Supposons par exemple $d'_{m_2} > d_{m_2}$; alors

$$(d'_{m_2} - d_{m_2})\, p^{m_2} = \sum_{q=m_2+1}^{m_1} (d_q - d'_q)\, p^q,$$

ou encore

$$d'_{m_2} - d_{m_2} = \sum_{q=m_2+1}^{m_1} (d_q - d'_q)\, p^{q-m_2}.$$

Cette relation est contradictoire, car le second membre est divisible par p, tandis que $d'_{m_2} - d_{m_2}$ est non nul et strictement inférieur à p.

Existence de la décomposition. Lorsque a est strictement inférieur à p, l'assertion est triviale. Procédons par récurrence, en supposant l'existence d'une telle décomposition prouvée pour tous les entiers naturels a' tels que $a' < p^{n_0}$, et en la prouvant pour tous les entiers naturels a tels que $a < p^{n_0+1}$. Divisons pour cela a par p^{n_0}; il existe un couple (d, a') d'entiers naturels tel que

$$a = p^{n_0} d + a', \qquad 0 \leqslant a' < p^{n_0}.$$

Puisque $a < p^{n_0+1}$, il est immédiat que $0 \leqslant d \leqslant p-1$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence s'applique à a'; donc

$$a' = d'_n p^n + \dots + d'_r p^r + \dots + d'_0,$$

où d'_r appartient à $[0, p-1]$ pour tout élément r de $[0, n]$. Puisque $a' < p^{n_0}$, n est strictement inférieur à n_0. La décomposition de a en découle, puisque

$$a = p^{n_0} d + a' = dp^{n_0} + d'_n p^n + \ldots + d'_r p^r + \ldots + d'_0 \,;$$

donc $d_{n_0} = d$, $d'_q = d_q$ pour tout élément q de $[0, n]$, $d_q = 0$ dans les autres cas.

Considérons enfin un entier naturel a quelconque. Il reste à montrer l'existence d'un entier n_0 tel que $a < p^{n_0}$. Il suffit pour cela de remarquer que, comme $p > 1$, p^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. (Posons en effet $p = 1 + h$; alors, d'après la formule du binôme de Newton,

$$p^n = 1 + nh + \ldots + h^n > 1 + nh.)$$

EXEMPLES

Lorsque $p = 10$, nous retrouvons la numération décimale; le nombre 6 807 est égal par définition à

$$6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7\,.$$

Lorsque $p = 2$, la numération est *binaire*. Les seuls chiffres sont 0 et 1; on les appelle souvent *bits* (abréviation de la locution anglaise *binary digit*). Le nombre 100 101 est égal par définition à

$$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1\,.$$

Lorsque $p = 8$, la numération est *octale*; les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Le nombre 605 177 est égal par définition à

$$6 \times 8^5 + 0 \times 8^4 + 5 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 7 \times 8 + 7\,.$$

Passage du système binaire au système décimal. Nous venons de voir l'interprétation de l'écriture d'un nombre en binaire, obtenue en traduisant bit par bit. On aura intérêt en pratique à connaître par cœur les premières puissances de 2 :

$2^0 = 1$	$2^8 = 256$
$2^1 = 2$	$2^9 = 512$
$2^2 = 4$	$2^{10} = 1\,024$
$2^3 = 8$	$2^{11} = 2\,048$
$2^4 = 16$	$2^{12} = 4\,096$
$2^5 = 32$	$2^{13} = 8\,192$
$2^6 = 64$	$2^{14} = 16\,384$
$2^7 = 128$	$2^{15} = 32\,768$

Ainsi, le nombre binaire 100 101 a pour équivalent décimal $32 + 4 + 1 = 37$.

Passage du système octal au système décimal. Il suffit d'extraire du tableau précédent le tableau des puissances de 8 :

$8^0 = 1$
$8^1 = 8$
$8^2 = 64$
$8^3 = 512$
$8^4 = 4\,096$
$8^5 = 32\,768$

Ainsi, le nombre 605 177 a pour équivalent décimal

$$196\,608+2\,560+64+56+7 = 199\,295\,.$$

Passage du système binaire au système octal. Il suffit de grouper les bits par paquets de trois en comptant à partir de la droite, et d'utiliser le tableau suivant :

binaire	octal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Nous trouvons ainsi la traduction octale de 100 101, à savoir 45, et celle de 1 111 101 000, à savoir 1 750.

Passage du système octal au système binaire. Le même tableau, lu à l'envers, permet de remplacer chaque chiffre octal par un triplet de bits. Par exemple, 605 177 se traduit par

$$110\,000\,101\,001\,111\,111\,.$$

Passage du système décimal au système octal. On obtient les chiffres de la droite vers la gauche, en prenant le reste de la division du nombre donné par 8, le reste du quotient obtenu dans la division par 8, et ainsi de suite. Par exemple, pour convertir 1 000 en octal, on divise 1 000 par 8 ; il reste 0, donc le dernier chiffre est 0. Le quotient est 125, que l'on divise par 8 ; il reste 5, et le quotient est 15. On divise 15 par 8 ; le reste est 7, et le quotient 1. Ce dernier quotient est égal au premier chiffre de l'équivalent octal de 1 000 : nous avons en effet trouvé, au bout de trois divisions par 8, que 1 000 est inférieur à 8^4, et que le quotient dans la division de 1 000 par 8^3 est 1. Finalement, nous obtenons le résultat annoncé :

$$1\,750\,.$$

Passage du système décimal au système binaire. La méthode précédente s'applique, avec cet avantage que les restes dans une division par 2 sont égaux à 0 ou 1. Divisons par exemple 1 000 par 2 ; le reste est 0, le quotient 500. On répète les divisions par 2, et l'on obtient successivement comme restes et quotients : 0 et 250, 0 et 125, 1 et 62, 0 et 31, 1 et 15, 1 et 7, 1 et 3, 1 et 1. Ce dernier quotient est égal au coefficient de 2^9 dans l'écriture binaire de 1 000. D'où le résultat

$$1\,111\,101\,000\,.$$

Il a fallu neuf divisions, au demeurant très simples.

On peut aussi commencer par la gauche, et déterminer les coefficients des puissances décroissantes de 2 à l'aide du tableau donné précédemment. Pour le nombre 1 000, on vérifie d'abord qu'il y a dix bits, puisque 1 000 est strictement inférieur à 1 024. On retranche la plus grande puissance de 2 inférieure à 1 000, à savoir 512; on cherche ensuite quelle est la plus grande puissance de 2 que l'on peut retrancher de $1\,000-512=488$, etc. On obtient ainsi la décomposition binaire

$$1\times 512+1\times 256+1\times 128+1\times 64+1\times 32+0\times 16+1\times 8+0\times 4+0\times 2+0\times 1$$

et bien entendu le même résultat que ci-dessus.

Cette méthode est très connue en pratique sous le nom de méthode des pesées successives.

3.4 Nombres entiers rationnels. Nous ne rappelons pas la construction de l'ensemble **Z** des entiers rationnels (parfois appelés entiers relatifs) à partir de l'ensemble **N** des entiers naturels, ni la définition des lois et de l'ordre sur **Z**. Nous nous contentons comme d'habitude de rappeler les résultats fondamentaux.

L'ensemble **Z**, muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau commutatif unitaire. L'ensemble **N** est une partie de **Z**, stable pour l'addition et la multiplication; les lois sur **Z** prolongent les lois de même nom sur **N**. (Autrement dit, la somme et le produit de deux entiers naturels, au sens des opérations sur **Z**, ne sont autres que les entiers naturels obtenus par l'addition et la multiplication au sens de **N**; il n'y a donc pas d'inconvénient à noter de la même manière l'addition sur **N** et l'addition sur **Z**; de même pour la multiplication.)

La relation d'ordre dans **Z** est une relation d'ordre total, prolongeant la relation d'ordre dans **N**. (Autrement dit, soient m et n deux entiers naturels; les relations $m\leqslant n$ au sens de **N** et au sens de **Z** sont équivalentes. Il n'y a donc pas d'inconvénient à noter de la même manière les relations d'ordre dans **N** et dans **Z**.)

Les éléments de **N** sont les éléments positifs de **Z** (c'est-à-dire les éléments supérieurs à 0).

De plus, pour tout entier rationnel p, la relation $m\leqslant n$ entraîne la relation $m+p\leqslant n+p$; si p est positif, la relation $m\leqslant n$ entraîne aussi la relation $mp\leqslant np$.

Ces propriétés se généralisant aux cas des nombres rationnels et des nombres réels, nous avons intérêt à poser les définitions suivantes :

Anneaux commutatifs ordonnés. On dit qu'un anneau commutatif A est un anneau ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre telle que, pour tout élément p de A, la relation $m\leqslant n$ entraîne la relation $m+p\leqslant n+p$, et, si p est positif, la relation $m\leqslant n$ entraîne aussi la relation $mp\leqslant np$.

Avec cette terminologie, l'anneau **Z** est un anneau ordonné.

Anneaux archimédiens. On dit qu'un anneau totalement ordonné A est archimédien si, pour tout élément strictement positif x de A et pour tout élément positif a de A, il existe un entier naturel n tel que $a\leqslant nx$.

Avec cette terminologie, l'anneau **Z** est archimédien.

Revoyons maintenant la division, appelée aussi *division euclidienne*. Soient a et b deux entiers rationnels, b étant strictement positif. Il existe un couple (q, r) et un seul d'entiers rationnels tel que

$$a = bq+r, \qquad 0\leqslant r<b\,.$$

Les nombres q et r s'appellent respectivement quotient et reste de la division de a par b.

Pour établir l'unicité du couple (q, r), considérons un deuxième couple (q', r') d'entiers rationnels tel que

$$a = bq' + r', \qquad 0 \leqslant r' < b.$$

Soustrayons les deux relations membre à membre; il vient

$$r - r' = b(q' - q),$$

d'où

$$|r - r'| = b|q' - q|.$$

Supposons par l'absurde $q' \neq q$; alors

$$b \leqslant b\,|q' - q| = |r' - r|,$$

ce qui contredit la relation

$$|r' - r| < b.$$

D'où $q' = q$, et finalement $r' = r$.

Pour établir l'existence du couple (q, r), il convient de distinguer deux cas suivant le signe de a (le cas où $a = 0$ étant trivial). Considérons par exemple le cas où a est strictement négatif. L'ensemble des entiers q tels que $a - bq$ soit positif est non vide, puisqu'il contient le nombre a, et majoré par $-a$; il admet donc un plus grand élément q_0. Posons $r_0 = a - bq_0$; par définition, r_0 est positif. De plus, r_0 est strictement inférieur à b, puisque, dans le cas contraire, $a - b(q_0 + 1)$ serait encore positif. Le couple (q_0, r_0) convient donc.

3.5 Structure des idéaux de Z. Les idéaux de l'anneau **Z** ne sont autres que les sous-groupes additifs de **Z**.

De plus, pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de **Z**, il existe un élément positif d de $\mathfrak{J}$ et un seul tel que $\mathfrak{J}$ soit l'ensemble des multiples de d.

En effet, tout idéal de **Z** est un sous-groupe additif de **Z**. Réciproquement, soient G' un sous-groupe additif de **Z** et a un élément de G'. Puisque G' est stable pour l'addition, on vérifie par récurrence que, pour tout entier naturel n, na appartient à G'. L'opposé de na, à savoir $(-n)\,a$, appartient aussi au sous-groupe additif G', ce qui montre que G' est un idéal de **Z**.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de **Z**. Écartons le cas trivial où $\mathfrak{J} = \{0\}$. Il existe donc un élément non nul n de $\mathfrak{J}$. Puisque $-n$ appartient à $\mathfrak{J}$, $|n|$ appartient à $\mathfrak{J}$, ce qui montre que l'ensemble des éléments strictement positifs de $\mathfrak{J}$ est non vide. Soit d son plus petit élément. Considérons un élément a de $\mathfrak{J}$, et la division euclidienne de a par d :

$$a = dq + r, \qquad 0 \leqslant r < d.$$

Puisque d appartient à $\mathfrak{J}$, il en est de même de dq, et aussi de $r = a - dq$, car $\mathfrak{J}$ est un idéal. La relation $0 \leqslant r < d$ montre alors que $r = 0$, par définition de d. Réciproquement, nous savons que tout élément de **Z** de la forme dq appartient à $\mathfrak{J}$.

Enfin, soit d' un élément strictement positif de $\mathfrak{J}$ tel que $\mathfrak{J}$ soit l'ensemble des multiples de d'. Alors d est un multiple de d'. Comme $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des multiples de d, d' est un multiple de d. L'antisymétrie de la relation de divisibilité dans $\mathbf{N}^*$ implique que $d' = d$.

3.6 Nombres rationnels. Il n'est pas de notre propos d'exposer la construction du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels à partir de l'anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers rationnels. Nous nous contentons encore de rappeler les résultats fondamentaux.

L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, muni de l'addition et de la multiplication, est un corps commutatif. L'ensemble $\mathbf{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$, les lois sur $\mathbf{Q}$ prolongeant les lois de même nom sur $\mathbf{Z}$.

La relation d'ordre dans $\mathbf{Q}$ est une relation d'ordre total, prolongeant la relation d'ordre dans $\mathbf{Z}$, et faisant de $\mathbf{Q}$ un corps ordonné.

De plus, le corps des rationnels est archimédien.

Les nombres décimaux sont des rationnels particuliers qui jouent un grand rôle en calcul numérique.

On dit qu'un nombre rationnel r est décimal s'il existe un entier naturel m tel que le nombre $10^m\, r$ soit un entier rationnel.

L'ensemble, noté $\mathbf{D}$, des nombres décimaux, muni de l'addition et de la multiplication, est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.

Tout nombre décimal strictement positif r s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$r = \sum_{q=m_2}^{m_1} d_q 10^q, \tag{1}$$

où m_1 et m_2 sont deux entiers rationnels, et où, pour tout entier rationnel q appartenant à l'intervalle $[m_2, m_1]$, d_q est un entier naturel appartenant à l'intervalle $[0, 9]$, $d_{m_1} \neq 0$, $d_{m_2} \neq 0$.

En effet, il est immédiat que tout entier rationnel est un nombre décimal (il suffit de prendre $m = 0$).

Soient r et s deux nombres décimaux. Il existe par hypothèse deux entiers naturels m et n tels que $10^m\, r$ et $10^n\, s$ appartiennent à $\mathbf{Z}$. Il en résulte que $10^{m+n}\, rs$ appartient à $\mathbf{Z}$, et donc que rs est un nombre décimal; en posant $l = \sup\,(m, n)$, nous voyons de même que $10^l(r-s)$ appartient à $\mathbf{Z}$, et donc que $r-s$ est un nombre décimal. Il en résulte que $\mathbf{D}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.

La décomposition de r sous la forme (1) résulte du nº 3.4 lorsque r est un entier naturel. Dans le cas contraire, écrivons r sous la forme $r = 10^{m_2}\, a$, où $-m_2$ désigne le plus petit des entiers naturels m tels que $10^m\, r$ appartienne à $\mathbf{N}$. Formons la décomposition décimale de a; l'existence et l'unicité de la décomposition de r s'obiennent aussitôt en multipliant les deux membres de la décomposition de a par 10^{m_2}.

3.7 Suites de nombres rationnels. On dit qu'une suite de nombres rationnels de terme général u_n est convergente s'il existe un nombre rationnel l possédant la propriété suivante :

Quel que soit le nombre rationnel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0, la différence $u_n - l$ soit en valeur absolue inférieure à ε.

Lorsqu'il n'existe pas un tel nombre l, on dit que la suite de terme général u_n est divergente.

Un tel élément l, s'il existe, est unique. On dit alors que l est la limite de la suite de terme général u_n, ou encore que cette suite converge vers l, ce qu'on note

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_n .$$

Soient en effet l et l' deux tels éléments. Alors, pour tout entier naturel n,

$$|l - l'| \leqslant |l - u_n| + |u_n - l'| .$$

Par hypothèse, pour tout nombre rationnel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que la relation $n_0 \leqslant n$ implique la relation

$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon .$$

Il existe de même un entier naturel n'_0 tel que la relation $n'_0 \leqslant n$ implique la relation

$$|u_n - l'| \leqslant \varepsilon .$$

Choisissons n supérieur à n_0 et à n'_0 ; nous voyons que

$$|l - l'| \leqslant 2\varepsilon ,$$

ce qui implique l'égalité de l et de l'.

EXEMPLES

1. La suite de terme général $1/n$ si $n \neq 0$ et de premier terme $u_0 = 0$ converge vers 0.

Il suffit en effet de prendre $n_0 \geqslant 1/\varepsilon$.

2. La suite de terme général $1/a^n$, où a est un nombre rationnel strictement supérieur à 1, converge vers 0.

Nous avons déjà vu au n° 3.4 que le nombre a^n est supérieur à tout nombre donné b, à partir d'un certain rang. Il suffit de prendre $b \geqslant 1/\varepsilon$.

La définition des suites convergentes a l'inconvénient manifeste de faire intervenir la valeur de la limite éventuelle. Il serait intéressant de pouvoir caractériser l'existence d'une limite sans essayer toutes les valeurs possibles pour l.

C'est le but de la définition suivante :

On dit qu'une suite de nombres rationnels de terme général u_n est une *suite de Cauchy* si, quel que soit le nombre rationnel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple (r, s) d'entiers naturels supérieurs à n_0, la différence $u_r - u_s$ soit en valeur absolue inférieure à ε.

La condition précédente, dite *condition de Cauchy*, est une condition nécessaire de convergence :

Soit en effet une suite de rationnels de terme général u_n convergeant vers l. Par hypothèse, pour tout nombre rationnel strictement positif ε, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0,

$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon/2 .$$

Soient r et s deux entiers supérieurs à n_0 ; alors

$$|u_r - u_s| \leqslant |u_r - l| + |u_s - l| \leqslant \varepsilon .$$

La condition de Cauchy n'est malheureusement pas une condition suffisante de convergence des suites de nombres rationnels, ainsi qu'en atteste l'exemple fondamental ci-dessous :

EXEMPLE. La suite d'éléments de **Q** de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

est une suite de Cauchy non convergente.

Pour vérifier qu'il s'agit d'une suite de Cauchy, introduisons deux entiers r et s, $r < s$ et majorons la différence $u_s - u_r$:

$$\begin{aligned} u_s - u_r &= \frac{1}{(r+1)!} + \frac{1}{(r+2)!} + \ldots + \frac{1}{s!} \\ &= \frac{1}{(r+1)!}\left[1 + \frac{1}{r+2} + \ldots + \frac{1}{(r+2)\,(r+3)\ldots s}\right]. \end{aligned}$$

Pour cela, minorons les dénominateurs :

$$u_s - u_r < \frac{1}{(r+1)!}\left[1 + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{(r+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(r+2)^{s-r-1}}\right].$$

Nous reconnaissons la progression géométrique de premier terme $1/(r+1)!$ et de raison $1/(r+2)$; le second membre est donc égal à

$$\frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1}{r+2}\right)^{s-r}}{1 - \dfrac{1}{r+2}},$$

quantité inférieure à

$$\frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{r+2}} = \frac{r+2}{r!(r+1)^2} < \frac{r+2}{r!(r^2+2r)} = \frac{1}{r.r!}.$$

Il est clair que $1/(r\,.\,r!)$ tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$; quel que soit le nombre rationnel strictement positif ε, il existe donc un entier naturel n_0 tel que l'inégalité $n_0 \leqslant r$ implique l'inégalité $u_s - u_r \leqslant \varepsilon$, ce qu'il fallait prouver.

Supposons maintenant que la suite de terme général u_n converge vers un nombre rationnel $e = p/q$. Il résulte de la majoration précédente que

$$u_n < e < u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Prenons alors n égal à q; il vient

$$\frac{p}{q} = u_q + \frac{\theta}{q \cdot q!},$$

où θ est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Multiplions enfin les deux membres de la dernière relation par $q \cdot q!$ Nous trouvons un entier au premier membre, et la somme d'un entier et de θ au second membre, ce qui est contradictoire.

Cet exemple montre l'insuffisance du corps des rationnels en analyse. On est donc amené à construire un corps **R** contenant **Q**, et où toute suite de Cauchy de rationnels converge (vers un élément de **R**, et non plus nécessairement vers un élément de **Q**).

3.8 Nombres réels. Toute construction de l'ensemble des nombres réels est en dehors du cadre de cet ouvrage. Nous nous contentons une fois encore d'énoncer les résultats fondamentaux.

L'ensemble **R** des nombres réels est muni d'une structure de corps commutatif ordonné. L'ensemble **Q** est un sous-corps de **R**, les lois sur **R** prolongeant les lois de même nom sur **Q**, et l'ordre dans **R** prolongeant l'ordre dans **Q**.

Enfin, le corps **R** est archimédien.

Les définitions des suites convergentes et des suites de Cauchy doivent être modifiées comme suit, dans le cas des nombres réels : il suffit de remplacer le nombre rationnel strictement positif ε par un nombre réel strictement positif ε, et le nombre rationnel l par un nombre réel l.

Le corps des nombres réels possède les deux propriétés fondamentales suivantes :

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Toute suite de Cauchy de nombres réels est une suite convergente.

De la sorte, la condition de Cauchy est une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite de réels. Elle porte le nom de *critère de Cauchy*, et s'énonce :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de nombres réels de terme général u_n soit convergente est que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple (r, s) d'entiers naturels supérieurs à n_0, la différence $u_r - u_s$ soit en valeur absolue inférieure à ε.

Les éléments du complémentaire de **Q** dans **R** sont appelés *nombres irrationnels*.

Par exemple, la suite de terme général

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

est une suite de Cauchy de nombres réels; elle converge donc (au sens de **R**) vers un nombre réel, noté e, lequel n'est pas rationnel.

Nous avons montré au passage qu'il existe des nombres irrationnels.

Enonçons encore deux théorèmes très importants :

• **Théorème des segments emboîtés.** *Soit (T_n) une suite décroissante (au sens de la relation d'inclusion) d'intervalles fermés bornés non vides $[a_n, b_n]$ de* **R**.

Si la longueur $b_n - a_n$ de l'intervalle T_n tend vers 0, *l'intersection des intervalles T_n est constituée d'un point l et d'un seul, et les suites de termes généraux a_n et b_n convergent toutes deux vers l.*

• **Théorème de la borne supérieure.** *Toute partie majorée non vide de* **R** *a une borne supérieure.*

De même, toute partie minorée non vide de **R** *a une borne inférieure.*

Il résulte de là que tous les intervalles non vides de **R** sont de l'un des neuf types suivants :

— intervalle fermé borné	$[a, b]$,	ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$
— intervalle ouvert borné	$]a, b[$,	ensemble des réels x tels que $a < x < b$
— intervalle semi-ouvert	$[a, b[$,	ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$
— intervalle semi-ouvert	$]a, b]$,	ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$
— demi-droite fermée	$[a, +\infty[$,	ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$
— demi-droite ouverte	$]a, +\infty[$,	ensemble des réels x tels que $a < x$
— demi-droite fermée	$]-\infty, b]$,	ensemble des réels x tels que $x \leqslant b$
— demi-droite ouverte	$]-\infty, b[$,	ensemble des réels x tels que $x < b$
— droite numérique	$]-\infty, +\infty[$,	ensemble de tous les réels.

Rappelons qu'une suite (u_n) est *croissante* si, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, et qu'une suite est *majorée* si son image est une partie majorée de **R**. On définit de même les suites décroissantes et les suites minorées.

Il résulte aussi de ce théorème qu'une suite croissante de nombres réels converge si et seulement si elle est majorée.

De même, une suite décroissante de nombres réels converge si et seulement si elle est minorée.

3.9 Racine n-ième d'un nombre réel positif. Soit n un entier naturel non nul. Nous admettons provisoirement que l'application $x \mapsto x^n$ est une bijection de l'ensemble $\mathbf{R}_+$ des nombres réels positifs sur lui-même. Alors l'application réciproque de l'application $x \mapsto x^n$ s'appelle fonction racine n-ième; sa valeur en un point y de $\mathbf{R}_+$ s'appelle racine n-ième de y, et se note $y^{1/n}$, ou encore $\sqrt[n]{y}$.

Ainsi, le nombre $\sqrt[n]{y}$ est défini comme l'unique solution positive de l'équation $x^n = y$, où y est un nombre réel positif donné.

Lorsque $n = 2$, le nombre réel positif $\sqrt[2]{y}$ s'appelle *racine carrée* de y, et se note $\sqrt{y}$.

Plus généralement, on peut donner un sens à l'écriture y^r pour y positif et r rationnel : nous reverrons cela d'une manière bien plus simple et bien plus générale dans le second tome, après l'étude des logarithmes.

3.10 Récapitulation. Nous avons vu un certain nombre d'ensembles de nombres, $\mathbf{R}$, et des sous-ensembles de $\mathbf{R}$:

a) l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\} ;$$

b) l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\} ;$$

c) l'ensemble $\mathbf{D}$ des nombres décimaux, nombres r tels qu'il existe un entier naturel m et un entier rationnel a vérifiant

$$10^m r = a ;$$

d) l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, nombres r tels qu'il existe deux entiers rationnels p et q, $q \neq 0$, vérifiant

$$pr = q .$$

Ces divers ensembles sont inclus l'un dans l'autre :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} ,$$

et toutes ces inclusions sont strictes :

a) $\mathbf{N} \neq \mathbf{Z}$ puisque par exemple $-1 \in \mathbf{Z}$ et $-1 \notin \mathbf{N}$,

b) $\mathbf{Z} \neq \mathbf{D}$ puisque par exemple $10^{-1} \in \mathbf{D}$ et $10^{-1} \notin \mathbf{Z}$,

c) $\mathbf{D} \neq \mathbf{Q}$ puisque par exemple $1/3 \in \mathbf{Q}$ et $1/3 \notin \mathbf{D}$,

d) $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$ puisque par exemple $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Munis de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre, ces ensembles ont les propriétés suivantes :

$\mathbf{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné,
$\mathbf{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné,
$\mathbf{D}$ est un anneau commutatif totalement ordonné,
$\mathbf{Z}$ est un anneau commutatif totalement ordonné.

En outre $\mathbf{R}$ est caractérisé par le fait que toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Cette propriété fondamentale sera très utilisée en analyse.

EXERCICES

3.1 Démontrer par récurrence l'égalité

$$1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2.$$

3.2 Démontrer par récurrence l'égalité

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6\,.$$

3.3 Démontrer par récurrence que, quel que soit n, le nombre $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

3.4 Démontrer par récurrence que, quel que soit l'entier n strictement positif, le nombre $n^2(n^2-1)$ est divisible par 12.

3.5 Montrer que le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

3.6 Montrer que le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ n'est pas rationnel.

3.7 Soient a, b, c, d quatre nombres rationnels et f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Comment faut-il choisir a, b, c, d pour que l'image de cette fonction soit contenue dans $\mathbf{Q}$?

3.8 On note $E(x)$ le plus grand entier inférieur à un réel x.
1° Montrer que $E(x+y) \geqslant E(x)+E(y)$.
2° Soit n un entier. Démontrer l'égalité $E(E(x)/n) = E(x/n)$.

3.9 Montrer que le nombre $(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n$ est entier.

3.10 Déterminer le sous-groupe du groupe additif $\mathbf{R}$ engendré par 1/7.

3.11 Déterminer le sous-anneau de l'anneau $\mathbf{R}$ engendré par 1/7.

3.12 Déterminer le sous-corps du corps $\mathbf{R}$ engendré par 1/7.

CHAPITRE 4

LES NOMBRES COMPLEXES

4.1 Présentation des nombres complexes. Rappelons que l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

admet des racines si et seulement si son discriminant $\Delta = b^2 - 4\,ac$ est positif. Ces racines sont alors :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}.$$

Dans le cas où $\Delta = 0$, ces racines sont confondues ; leur valeur commune est $-b/2\,a$. Enfin, dans le cas où $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions est vide. En particulier, l'équation :

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$

n'admet pas de solution. Redémontrons directement ce résultat en remarquant que, pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$; par suite, $x^2 + 1 > 0$, et donc $x^2 + 1 \neq 0$.

Or, les racines de l'équation (1), si elles existaient, seraient très commodes dans de nombreux calculs. C'est pourquoi des mathématiciens italiens du XVI^e siècle, Bombelli et Cardan (l'inventeur du joint homocinétique, utilisé sur toutes les automobiles à traction), ont eu l'idée d'introduire un nombre solution de l'équation (2). Un tel nombre est dit *imaginaire* (car ce n'est pas un nombre *réel*) ; pour cette raison, il est noté i, du moins par les mathématiciens ne se souciant pas des applications à l'électricité. Dans le présent cours, destiné aux ingénieurs et aux futurs ingénieurs, nous réservons la lettre i à l'intensité d'un courant, et nous noterons j l'une des solutions de l'équation (2).

Les nombres de la forme $a + b\mathrm{j}$, où a et b appartiennent à $\mathbf{R}$, sont appelés *nombres complexes*. Les règles de calcul sur les nombres complexes sont exactement aussi simples que dans le cas des nombres réels... à condition toutefois de penser à remplacer systématiquement j^2 par -1.

Nous verrons que les nombres complexes, inventés pour résoudre l'équation (2), permettent de résoudre l'équation la plus générale (1), même lorsque $\Delta < 0$. Nous terminerons bien entendu ce chapitre par des applications au courant alternatif, suivant les travaux du grand ingénieur américain Steinmetz (1890).

4.2 Corps des nombres complexes. Il existe de nombreux procédés de construction des nombres complexes. Le plus simple consiste à munir l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples (a, b) de nombres réels des deux lois de composition suivantes :

— L'addition, définie par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') ;$$

— La multiplication, définie par

$$(a, b).(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

On démontre que, muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathbf{R}^2$ est un corps commutatif ; ce corps est appelé corps des nombres complexes et noté **C**.

L'élément neutre pour l'addition est le couple (0, 0) ; l'élément neutre pour la multiplication est le couple (1, 0). En outre, l'élément (0, 1) satisfait à la relation $(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$.

L'application $a \mapsto (a, 0)$ est un morphisme injectif de **R** dans **C**, permettant d'identifier le corps **R** à un sous-corps de **C**. En particulier, les éléments (0, 0) et (1, 0) seront notés plus simplement 0 et 1, comme dans tout corps. L'élément (0, 1), qui est une solution de l'équation (2), sera noté j.

4.3 Forme cartésienne des nombres complexes. Les relations

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \qquad \text{et} \qquad (0, b) = (b, 0).(0, 1)$$

montrent que tout nombre complexe $z = (a, b)$ peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{z = a + b\mathrm{j}}\,.$$

De plus, une telle écriture est unique : soient en effet (a, b) et (a', b') des couples de nombres réels tels que :

$$a + b\mathrm{j} = a' + b'\mathrm{j}.$$

Alors $(b - b')\mathrm{j} = a' - a$. Si $b - b'$ était non nul, nous pourrions écrire j sous la forme :

$$\mathrm{j} = \frac{a' - a}{b - b'},$$

ce qui contredit le fait que j n'appartient pas à **R**. Donc $b' = b$ et, par suite, $a' = a$, ce qu'il fallait prouver.

L'écriture $a + b\mathrm{j}$ est appelée *forme cartésienne* du nombre complexe z (en l'honneur de René Descartes, qui a pensé le premier à utiliser des couples de nombres réels).

Le nombre réel a s'appelle partie réelle du nombre complexe z, et se note Re (z) ; *le nombre réel b s'appelle partie imaginaire du nombre complexe z, et se note* Im (z). *Les nombres complexes de partie réelle nulle sont dits imaginaires purs.*

Avec ces notations, la somme et le produit de deux nombres complexes $z = a + b\mathrm{j}$ et $z' = a' + b'\mathrm{j}$ s'écrivent :

$$z + z' = (a + b\mathrm{j}) + (a' + b'\mathrm{j}) = a + a' + (b + b')\mathrm{j},$$
$$zz' = (a + b\mathrm{j})(a' + b'\mathrm{j}) = aa' - bb' + (ab' + ba')\mathrm{j}.$$

Les parties réelle et imaginaire d'une somme ou d'un produit de nombres complexes sont donc données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z'),\\
&\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z'),\\
&\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z).\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z).\operatorname{Im}(z'),\\
&\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z).\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z).\operatorname{Re}(z').
\end{aligned}$$

EXEMPLES.

1° *Calculer la somme de* $3 + 4\mathrm{j}$ *et de* $1 - \mathrm{j}$

$$(3 + 4\mathrm{j})(1 - \mathrm{j}) = 3 + 1 + (4 - 1)\mathrm{j} = 4 + 3\mathrm{j}.$$

2° *Calculer le produit de* $3 + 4\mathrm{j}$ *et de* $1 + \mathrm{j}$

$$(3 + 4\mathrm{j})(1 + \mathrm{j}) = 3 + 4\mathrm{j} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{j}^2 = -1 + 7\mathrm{j}.$$

4.4 Nombres complexes conjugués. *L'application de* **C** *dans lui-même qui à tout nombre complexe* $z = a + b\mathrm{j}$ *associe le nombre complexe* $\bar{z} = a - b\mathrm{j}$ *est un automorphisme, égal à son application réciproque :*

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Le nombre complexe $\bar{z}$ *est dit conjugué de* z ; *vu la symétrie entre* z *et* $\bar{z}$, *on dit aussi que les nombres complexes* z *et* $\bar{z}$ *sont conjugués.*

Il est en effet immédiat que cette application est bijective, puisqu'elle admet une application réciproque (à savoir elle-même). De plus, pour tout couple (z, z') de nombres complexes,

$$\begin{aligned}
\overline{z + z'} &= a + a' - (b + b')\mathrm{j} = a - b\mathrm{j} + a' - b'\mathrm{j} = \bar{z} + \bar{z}',\\
\overline{zz'} &= aa' - bb' - (ab' + ba')\mathrm{j} = (a - b\mathrm{j})(a' - b'\mathrm{j}) = \bar{z}.\bar{z}'.
\end{aligned}$$

Propriétés des nombres complexes conjugués. La somme de deux nombres complexes conjugués est réelle, leur différence est imaginaire pure. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
&z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z),\\
&z - \bar{z} = 2\mathrm{j}\operatorname{Im}(z).
\end{aligned}$$

En particulier, pour que $\bar{z} = z$, il faut et il suffit que z soit réel ; pour que $\bar{z} = -z$, il faut et il suffit que z soit imaginaire pur.

Le produit de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel positif. Plus précisément :

$$z.\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2.$$

EXEMPLE.

Prenons pour z le nombre complexe $3 + 4\,\mathrm{j}$. Alors :

$$\bar{z} = 3 - 4\,\mathrm{j} \qquad z + \bar{z} = 6 \qquad z - \bar{z} = 8\,\mathrm{j} \qquad z.\bar{z} = 9 + 16 = 25\,.$$

Remarque. Pour obtenir la forme cartésienne d'un quotient

$$z = \frac{a + b\mathrm{j}}{c + d\mathrm{j}}\,,$$

on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de celui-ci :

$$z = \frac{(a + b\mathrm{j})\,(c - d\mathrm{j})}{(c + d\mathrm{j})\,(c - d\mathrm{j})} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathrm{j}\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,.$$

EXEMPLE.

Calculer $z = \dfrac{3 + 4\,\mathrm{j}}{1 + \mathrm{j}}$:

$$z = \frac{(3 + 4\,\mathrm{j})\,(1 - \mathrm{j})}{(1 + \mathrm{j})\,(1 - \mathrm{j})} = \frac{3 + 4 + \mathrm{j}(4 - 3)}{1 - \mathrm{j}^2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\,.$$

4.5 Module d'un nombre complexe. Nous venons de voir que le produit de z par son conjugué est un nombre réel positif. La racine carrée de celui-ci s'appelle *module* du nombre complexe z et se note $|\,z\,|$:

$$|\,z\,| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

En particulier, lorsque z est réel, le module de z n'est autre que la valeur absolue de a, ce qui explique pourquoi on emploie le même symbole pour le module d'un nombre complexe et la valeur absolue d'un nombre réel.

La définition du module de z fait jouer des rôles analogues à z et à $\bar{z}$; ainsi, des nombres complexes conjugués ont le même module :

$$|\,z\,| = |\,\bar{z}\,|\,.$$

Pour tout nombre complexe z,

$$|\,\mathrm{Re}\,(z)\,| \leqslant |\,z\,|\,, \qquad |\,\mathrm{Im}\,(z)\,| \leqslant |\,z\,|\,.$$

En outre, la première inégalité devient une égalité si et seulement si z est réel ; la seconde inégalité devient une égalité si et seulement si z est imaginaire pur.

Il s'agit de conséquences immédiates de la relation

$$|\,z\,|^2 = z.\bar{z} = [\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2\,.$$

Il est clair que z est nul si et seulement si son module est nul.

Examinons maintenant les modules d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes.

Le module du produit de deux nombres complexes est égal au produit de leurs modules :

$$|zz'| = |z|.|z'|.$$

En effet :

$$|zz'|^2 = (zz')\,(\overline{zz'}) = zz'\,\bar{z}\,\bar{z}' = |z|^2.|z'|^2.$$

On obtient la relation annoncée en prenant les racines carrées des deux membres.

Supposons $z' \neq 0$. La relation $z'' = z/z'$ équivaut à $z = z'\,z''$. Par suite :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Ainsi, le module d'un quotient est égal au quotient des modules du numérateur et du dénominateur.

Pour tout couple (z, z') *de nombres complexes,*

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \tag{1}$$

(*inégalité triangulaire*). *Lorsque* z *est non nul, il y a égalité si et seulement s'il existe un nombre réel positif* a *tel que* $z' = az$.

L'inégalité triangulaire est évidente lorsque $z = 0$; dans le cas contraire, elle équivaut à

$$|1 + u| \leqslant 1 + |u|, \tag{2}$$

où l'on a posé $u = z'/z$. De plus, il y a égalité simultanément dans les relations (1) et (2). La relation (2) est encore équivalente à la suivante :

$$|1 + u|^2 \leqslant (1 + |u|)^2. \tag{3}$$

D'une part,

$$|1 + u|^2 = (1 + u)\,(1 + \bar{u}) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\,(u) + |u|^2 ;$$

d'autre part,

$$(1 + |u|)^2 = 1 + 2\,|u| + |u|^2.$$

L'inégalité (3) équivaut donc à l'inégalité

$$\mathrm{Re}\,(u) \leqslant |u|, \tag{4}$$

laquelle est une conséquence immédiate de l'inégalité $|\mathrm{Re}\,(u)| \leqslant |u|$.

Supposons enfin qu'il y ait égalité dans la relation (1) ; alors la relation (4) devient $\mathrm{Re}\,(u) = |u|$, ce qui signifie que u est réel positif. Réciproquement, si u est réel positif, il est évident que

$$|1 + u| = 1 + |u|.$$

La formule donnant le module d'un produit montre que si z et z' ont pour module 1, il en est de même de leur produit ; la formule donnant le module d'un quotient montre que si z a pour module 1, il en est de même de $1/z$. Par suite, l'ensemble **U** des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes non nuls.

EXEMPLES.

$$|3 + 4\mathrm{j}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$|1 + \mathrm{j}| = \sqrt{2}$$
$$|(3 + 4\mathrm{j})(1 + \mathrm{j})| = |3 + 4\mathrm{j}|.|1 + \mathrm{j}| = 5\sqrt{2}$$
$$\left|\frac{1}{3 + 4\mathrm{j}}\right| = \frac{1}{|3 + 4\mathrm{j}|} = \frac{1}{5}$$
$$\left|\frac{1 + \mathrm{j}}{3 + 4\mathrm{j}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

4.6 Suites de nombres complexes. Les définitions des suites convergentes et des suites de Cauchy s'étendent au cas des suites de nombres complexes : il suffit de remplacer le nombre réel l par le nombre complexe l dans la définition des suites convergentes, et de lire « module » au lieu de « valeur absolue ». Comme dans le cas de **R**, la condition de Cauchy est encore une condition nécessaire et suffisante de convergence, appelée encore *critère de Cauchy.*

Si une suite (u_n) de nombres complexes a une limite l, alors la suite $(|u_n|)$ a pour limite $|l|$.

En effet, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\big|\,|u_n| - |l|\,\big| \leqslant |u_n - l|\,.$$

EXEMPLE. — **Somme des termes d'une suite géométrique.** *Soient r un nombre complexe et (u_n) une suite géométrique non nulle de raison r. Pour que la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ ait une limite lorsque n tend vers $+\infty$, il faut et il suffit que $|r| < 1$. La limite de cette somme est alors $u_0 \dfrac{1}{1 - r}$.*

En effet, nous savons que

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} &= u_0 \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad \text{si } r \neq 1 \\ &= n u_0 \qquad\qquad \text{si } r \neq 1\,. \end{aligned}$$

Puisque la suite (u_n) n'est pas nulle, u_0 est différent de 0.

Lorsque $r = 1$, il est immédiat que cette somme n'a pas de limite.

Lorsque $r \neq 1$, cette somme a une limite si et seulement si r^n en a une. Or, $|r^n| = |r|^n$.

Si $|r| < 1$, $|r|^n$ tend vers 0, et il en est de même de r^n.

Si $|r| > 1$, $|r|^n$ tend vers $+\infty$, et r^n n'a pas de limite.

Enfin, si $|r| = 1$ et $r \neq 1$, l'existence d'une limite pour r^n impliquerait que $r = r^{n+1}/r^n$ tendrait vers 1, ce qui est absurde.

4.7 Représentation géométrique d'un nombre complexe. Considérons le plan rapporté au repère défini par le point O et deux vecteurs unitaires orthogonaux $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ définissant les axes Ox et Oy (Fig. 4.1). A tout point M du plan on peut associer le couple de nombres (a, b), coordonnées du point M.

On dit que le point M est l'*image* du nombre complexe $z = a + bj$.

Réciproquement, au nombre complexe $a+bj$, correspond dans le plan $(O, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ le point M de coordonnées a et b.

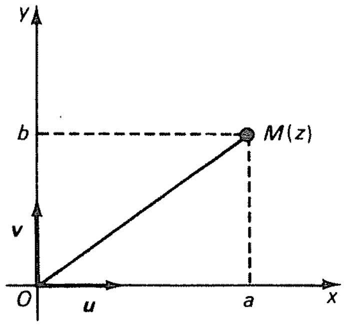


FIG. 4.1

On dit que le nombre complexe $a+bj$ est l'*affixe* du point $M(a, b)$.

On a ainsi établi une bijection entre l'ensemble des nombres complexes et l'ensemble des points du plan. Le plan ainsi représenté est appelé *plan complexe*.

Examinons les images de nombres complexes particuliers (Fig. 4.2) :

1° $z = 0$ a pour image le point O.

2° Un nombre réel $z = a$ a pour image un point de Ox. L'axe Ox est appelé *axe réel*.

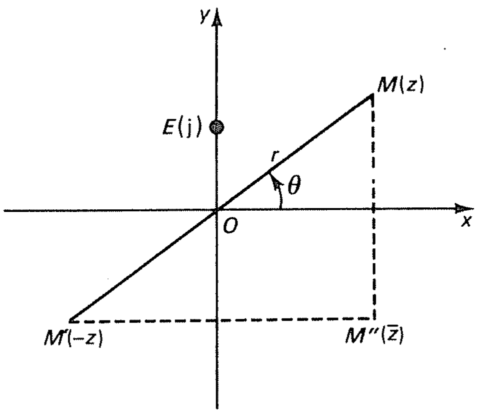


FIG. 4.2

3° Un nombre imaginaire pur $z = bj$ a pour image un point de Oy. L'axe Oy est appelé *axe imaginaire*. Le point E de coordonnées (0, 1) est l'image du nombre complexe j.

4° Les nombres complexes opposés

$$z = a + bj \quad \text{et} \quad z' = -a - bj = -z$$

ont pour images les points M et M' symétriques par rapport à l'origine.

5° Les nombres complexes conjugués

$$z = a + bj \quad \text{et} \quad \bar{z} = a - bj$$

ont pour images des points M et M'' symétriques par rapport à Ox.

La représentation géométrique des nombres complexes permet d'interpréter l'addition dans **C** : soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs images ; alors la somme $z + z'$ a pour image l'extrémité M'' du bipoint d'origine O de vecteur associé $\boldsymbol{OM} + \boldsymbol{OM}'$.

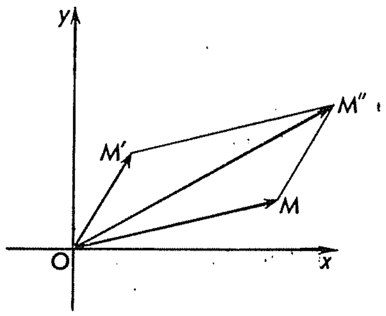


FIG. 4.3

Le module d'un nombre complexe z est égal à la distance $\| \boldsymbol{OM} \|$. L'inégalité du triangle pour les nombres complexes se traduit par l'inégalité bien connue dans le triangle OMM'' :

$$\| \boldsymbol{OM}'' \| \leqslant \| \boldsymbol{OM} \| + \| \boldsymbol{MM}'' \|$$

Le cas d'égalité correspond à l'alignement de O, M et M'', les vecteurs $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{MM}''$ ayant même sens.

4.8 Forme trigonométrique des nombres complexes. Considérons dans le plan complexe le vecteur $\boldsymbol{OM}$. On dit aussi que le vecteur $\boldsymbol{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe $z = a + bj$. On peut repérer le vecteur $\boldsymbol{OM}$ par une mesure θ (en radians) de son angle polaire $(\boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{OM})$ définie à un multiple entier près de 2π, et par sa longueur

$$r = OM$$

appelée aussi *module* du nombre complexe z.

Le module de z est noté $|z|$. Ainsi, $|z| = r$.

Si θ est une des mesures de $(\boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{OM})$, toute autre est de la forme

$$\theta' = \theta + 2k\pi ,$$

k étant un entier rationnel.

Il existe donc un de ces nombres et un seul appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$; on l'appelle argument principal de z, et on le note $\operatorname{Arg} z$. Les autres sont appelés simplement arguments de z.

En considérant les projections orthogonales du vecteur $\boldsymbol{OM}$ sur les axes Ox et Oy on obtient les formules suivantes :

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta,$$

d'où

$$r^2 = a^2 + b^2 .$$

Le nombre complexe $z = a + b\mathrm{j}$ se met donc sous la forme

$$\boxed{z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)}$$

appelée *forme trigonométrique*.

Il est parfois commode d'écrire

$$z = [r, \theta]$$

pour désigner le nombre complexe de module r et d'argument θ.

EXEMPLES.

$$z_1 = [1, \pi/4] = \cos\pi/4 + \mathrm{j}\sin\pi/4 \qquad \text{a pour image } A.$$

$$z_2 = [1, 3\pi/4] = \cos 3\pi/4 + \mathrm{j}\sin 3\pi/4 \qquad \text{a pour image } B.$$

$$z_3 = [1, 5\pi/4] = \cos 5\pi/4 + \mathrm{j}\sin 5\pi/4 = -(\cos\pi/4 + \mathrm{j}\sin\pi/4)$$

a pour image le point C.

$$z_4 = [1, -\pi/4] = \cos\pi/4 - \mathrm{j}\sin\pi/4 \qquad \text{a pour image } D.$$

Remarquons que :

$$z_3 = -z_1 ; \qquad \bar{z}_4 = z_1 ; \qquad \bar{z}_3 = z_2 ; \qquad z_4 = -z_2 .$$

Le point E de coordonnées (0, 1) est l'image du nombre complexe j de module 1, d'argument $\pi/2$. Donc $\mathrm{j} = [1, \pi/2]$.

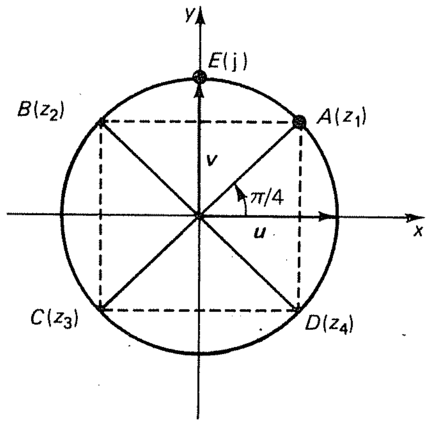


FIG. 4.4

Tout nombre réel a a pour module $|a|$ et pour argument $\theta = 0$ si a est positif, $\theta = \pi$ si a est négatif. Tout nombre complexe imaginaire $b\mathrm{j}$ a pour module $|b|$ et pour argument $\theta = \pi/2$ si b est positif, $-\pi/2$ si b est négatif.

Remarquons que si deux nombres complexes z et z' sont égaux, leurs images sont confondues, donc

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM'} \Leftrightarrow r = r' \quad \text{et} \quad \theta = \theta' + 2k\pi.$$

Pour que deux nombres complexes soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même module et des arguments égaux à $2k\pi$ près.

EXEMPLES.

1° Un nombre complexe $z = a + b\mathrm{j}$ étant donné, on veut l'écrire sous la forme trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta).$$

Le module r et l'argument θ sont définis par les relations :

$$r^2 = a^2+b^2 \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Écrivons sous la forme trigonométrique $z = 4 - 3\mathrm{j}$.
On déduit :

$$r^2 = 16+9 = 25, \qquad r = 5;$$

$$\cos\theta = 4/5, \qquad \sin\theta = -3/5.$$

Ainsi, θ appartient à l'intervalle $[-\pi/2, 0]$.

2° Déterminons le module et l'argument du nombre complexe

$$z = -2(\cos \pi/8 + \mathrm{j} \sin \pi/8).$$

Cette relation s'écrit :

$$z = 2(-\cos \pi/8 - \mathrm{j} \sin \pi/8) = 2[\cos(\pi+\pi/8) + \mathrm{j} \sin(\pi+\pi/8)].$$

Le module de z est 2; son argument est $9\pi/8$ à $2k\pi$ près.

Argument d'un produit. Soient z et z' des nombres complexes écrits sous forme trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + \mathrm{j} \sin \theta), \qquad z' = r'(\cos \theta' + \mathrm{j} \sin \theta').$$

Alors :

$$zz' = rr'(\cos \theta + \mathrm{j} \sin \theta)(\cos \theta' + \mathrm{j} \sin \theta')$$

ou

$$zz' = rr'[\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + \mathrm{j}(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')],$$

soit

$$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + \mathrm{j} \sin(\theta + \theta')].$$

Nous retrouvons le fait que le module de zz' est le produit des modules de z et de z' ; en outre, un argument de zz' est $\theta + \theta'$.

On peut écrire

$$[r, \theta]\,[r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'].$$

Par exemple

$$[1, \pi/3]\,[2, \pi/4] = [2, 7\pi/12].$$

Argument d'un quotient. Supposons $z' \neq 0$. La relation $z'' = z/z'$ équivaut à $z = z'z''$. Si $z'' = r''(\cos \theta'' + \mathrm{j} \sin \theta'')$, nous obtenons

$$r(\cos \theta + \mathrm{j} \sin \theta) = r'r''[\cos(\theta' + \theta'') + \mathrm{j} \sin(\theta' + \theta'')].$$

Nous retrouvons le fait que le module de z/z' est le quotient des modules de z et de z' ; en outre, un argument de z/z' est $\theta - \theta'$.

Par exemple, si $z = [6, -\pi/4]$ et $z' = [2, \pi/2]$, alors

$$z'' = z/z' = [3, -3\pi/4] = 3(\cos 3\pi/4 - \mathrm{j} \sin 3\pi/4)$$
$$= 3(-\sqrt{2}/2 - \mathrm{j}\sqrt{2}/2) = -3\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{j}).$$

4.9 Le nombre complexe j, opérateur de rotation. Considérons les deux nombres complexes

$$z = [r, \theta] \quad \text{et} \quad \mathrm{j} = [1, \pi/2].$$

Formons le produit

$$\mathrm{j}z = [1, \pi/2] \,.\, [r, \theta] = [r, \theta + \pi/2].$$

Le module de jz est égal à celui de z mais chaque argument a augmenté de $\pi/2$. Ce résultat interprété géométriquement, montre que le point M' image de jz se déduit du point M, image de z, dans la rotation de centre O, d'angle de rotation $\pi/2$ (Fig. 4.5).

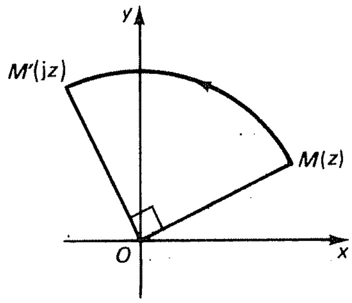


FIG. 4.5

L'image du nombre complexe jz *se déduit de l'image de* z *dans la rotation de centre* O, *d'angle* $\pi/2$.

D'une façon plus générale, le produit

$$[1, \alpha]\,[r, \theta] = [r, \theta+\alpha]$$

montre que le point M' image de $(\cos\alpha+\mathrm{j}\sin\alpha)\,z$ se déduit du point M image de z, dans la rotation de centre O, d'angle α (Fig. 4.6). Ce résultat permet de déterminer les coordonnées (x', y') de M' connaissant les coordonnées (x, y) du point M. En effet :

$$x'+\mathrm{j}y' = (\cos\alpha+\mathrm{j}\sin\alpha)\,(x+\mathrm{j}y),$$
$$x'+\mathrm{j}y' = x\cos\alpha-y\sin\alpha+\mathrm{j}(x\sin\alpha+y\cos\alpha).$$

Donc

$$x' = x\cos\alpha-y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

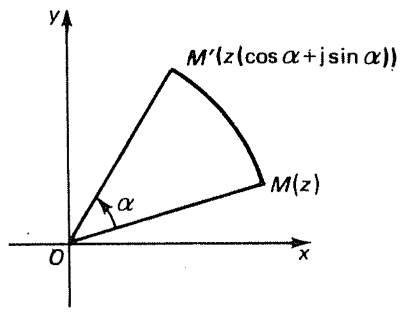


FIG. 4.6

4.10 Formule de Moivre. Considérons le nombre complexe

$$z = r(\cos\ \theta + \mathrm{j}\sin\ \theta).$$

Son module est r, un argument est θ. Calculons

$$z^n = [r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)]^n$$

où n est un entier naturel.

L'expression z^n représente le produit de z, n fois par lui-même. Alors, z^n a pour module r^n et un argument de z^n est $n\theta$ (nº 4.8). On obtient la formule suivante connue sous le nom de formule de Moivre :

$$[r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta).$$

Pour $r = 1$, la formule devient

$$\boxed{(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta}\ .$$

Cette formule permet d'exprimer $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\operatorname{tg} n\theta$ à partir de $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\operatorname{tg}\theta$.

EXEMPLE. Pour $n = 3$, on obtient :

$$(\cos\ \theta + \mathrm{j}\sin\ \theta)^3 = \cos 3\theta + \mathrm{j}\sin 3\theta.$$

Développons le premier membre par la formule du binôme :

$$\cos^3\theta + 3\mathrm{j}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{j}\sin^3\theta = \cos 3\theta + \mathrm{j}\sin 3\theta$$

$$\cos^3\ \theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + \mathrm{j}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + \mathrm{j}\sin 3\theta.$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on a :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$

$$\operatorname{tg} 3\theta = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta} = \frac{3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^3\theta}{1 - 3\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Cas où n est un entier négatif. Posons dans ce cas $n = -n'$, où $n' > 0$:

$$(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^{-n'} = \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^{n'}} = \frac{1}{\cos n'\theta + \mathrm{j}\sin n'\theta}.$$

Donc

$$(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^{-n'} = \cos(-n'\theta) + \mathrm{j}\sin(-n'\theta)$$

et, en remplaçant $-n'$ par n, on a :

$$(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta.$$

4.11 Racines n-ièmes d'un nombre complexe. *Soient $a = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$ un nombre complexe et n un entier naturel. On appelle racine n-ième de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.*

Si $a=0$, seul $z=0$ répond au problème posé. Nous écarterons désormais le cas $a=0$. Alors $z=0$ ne peut être solution. On peut donc poser

$$z = \rho(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha).$$

En appliquant la formule de Moivre, l'égalité $z^n = a$ s'écrit

$$\rho^n(\cos n\alpha + \mathrm{j}\sin n\alpha) = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

soit

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi. \end{cases}$$

Comme r est positif et que ρ doit être positif, il existe un seul nombre ρ, à savoir :

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

D'autre part

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n}.$$

A chaque valeur du nombre entier k correspond une valeur de α; mais à deux valeurs de k qui diffèrent de n, correspondent deux valeurs de α qui diffèrent de 2π et qui représentent ainsi le même z. Les solutions distinctes sont donc obtenues pour les n valeurs de k

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Les modules des nombres solutions ont pour valeur commune $\sqrt[n]{r}$. Leurs arguments principaux diffèrent deux à deux de $2\pi/n$. Les images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés. Donc

Tout nombre complexe admet exactement n racines n-ièmes. Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle admettant l'origine pour centre.

Les racines sont

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

EXEMPLES.

1. *Calculer les racines carrées du nombre complexe*

$$a = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta).$$

Il existe deux racines carrées :

$$z_k = \sqrt{r}\,[\cos(\theta/2+k\pi) + \mathrm{j}\sin(\theta/2+k\pi)],$$

avec $k \in \{0, 1\}$.

Soit :

$$z_0 = \sqrt{r}\,(\cos\theta/2 + \mathrm{j}\sin\theta/2),$$

$$z_1 = \sqrt{r}\,[\cos(\theta/2+\pi) + \mathrm{j}\sin(\theta/2+\pi)] = -\sqrt{r}\,(\cos\theta/2 + \mathrm{j}\sin\theta/2),$$

qui sont deux nombres opposés.

Ainsi les racines carrées de $\mathrm{j} = [1, \pi/2]$ sont

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j}).$$

2. *Calculer les racines cubiques de l'unité.* Dans ce cas $r = 1$, $\theta = 0$. Les racines cubiques de l'unité sont les trois nombres

$$z_k = \cos 2k\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin 2k\frac{\pi}{3}, \qquad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si on désigne $z_1 = -1/2 + \mathrm{j}\sqrt{3}/2$ par la lettre ω, alors $z_2 = \omega^2 = \bar{\omega}$.

L'unité admet donc les trois racines cubiques 1, ω, ω^2 dont les images sont les sommets d'un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle de rayon 1.

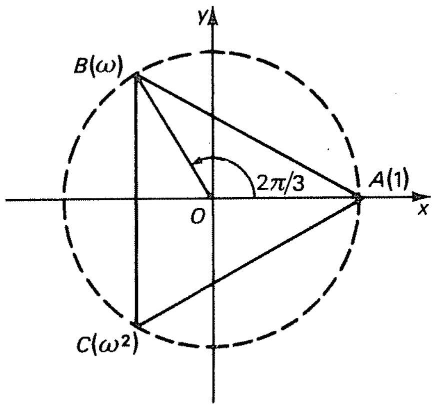


FIG. 4.7

Il est facile de vérifier que

$$1+\omega+\omega^2 = 0.$$

Remarquons que les nombres complexes $1, \omega, \omega^2$ sont les solutions de l'équation

$$z^3-1 = 0.$$

3. *Calculer les racines de l'équation* $z^5 = 7$.

On a

$$\rho^5(\cos 5\theta+\mathrm{j}\sin 5\theta) = 7.$$

Donc

$$\rho = \sqrt[5]{7}, \qquad 5\theta = 2k\pi.$$

Soit

$$z_k = \sqrt[5]{7}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+\mathrm{j}\sin\frac{2k\pi}{5}\right),$$

avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Les images sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O, de rayon $\sqrt[5]{7}$.

4.12 Calcul d'une racine carrée d'un nombre complexe. Le calcul d'une racine carrée peut se faire sans utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes. En effet :

$$z^2 = c \tag{1}$$

admet une solution et une seule, à savoir 0, si $c=0$; elle admet deux solutions opposées si $c \neq 0$.

En particulier, si c est réel, l'équation (1) admet :

— une solution et une seule, à savoir 0, si $c=0$;
— deux solutions opposées, à savoir les nombres réels $\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$, si $c>0$;
— deux solutions opposées, à savoir les nombres imaginaires purs $\mathrm{j}\sqrt{-c}$ et $-\mathrm{j}\sqrt{-c}$, si $c<0$.

Écartons le cas trivial où $c=0$; écrivons z et c sous forme cartésienne :

$$z = x+\mathrm{j}y, \qquad c = a+\mathrm{j}b.$$

L'équation $z^2 = c$ équivaut au système

$$\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

De plus, en prenant les modules des deux membres de la relation $z^2 = c$, nous obtenons la relation

$$x^2+y^2 = \rho, \qquad \text{où} \qquad \rho = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Distinguons alors deux cas :

Le nombre c est réel. Alors $a = c$, $b = 0$, et l'un des deux nombres x et y est nul.

Si c est strictement positif, la relation $x = 0$ est impossible, puisqu'elle conduit à $-y^2 = c > 0$. Il reste $y = 0$, d'où $x^2 = c$, et $x = \pm\sqrt{c}$.

Si c est strictement négatif, la relation $y = 0$ est impossible, puisqu'elle conduit à $x^2 = c < 0$. Il reste $x = 0$, d'où $y^2 = -c$, $y = \pm\sqrt{-c}$ et $z = \pm \mathrm{j}\sqrt{-c}$.

Le nombre c n'est pas réel. L'équation (1) équivaut encore au système

$$\begin{cases} 2x^2 = \rho + a \\ 2xy = b\,. \end{cases}$$

Le nombre $\rho + a$ est un nombre réel strictement positif, puisque b est non nul. D'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}, \qquad \text{et} \qquad y = \frac{b}{2x}.$$

Nous obtenons ainsi deux valeurs opposées pour z.

Exemple. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe*

$$-33/4 - 14\mathrm{j}\,.$$

Appliquons la méthode précédente, en cherchant les couples (x, y) de nombres réels tels que

$$(x + \mathrm{j}y)^2 = -33/4 - 14\mathrm{j}\,.$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -33/4 \\ \quad xy = -7\,. \end{cases}$$

De plus,

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(33/4)^2 + 14^2} = \sqrt{4225/4^2} = 65/4\,.$$

D'où $x^2 = 4$, et $x = \pm 2$.

Si $x = 2$, nous tirons de la relation $xy = -7$ la valeur $y = -7/2$; si $x = -2$ alors $y = 7/2$.

D'où enfin les solutions

$$z = \pm\left(2 - \frac{7}{2}\mathrm{j}\right).$$

4.13 Application à la résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes. Montrons sur un exemple comment on peut résoudre une telle équation. Cherchons les solutions de l'équation

$$z^2 + 2(1 - \mathrm{j})\,z - 6\mathrm{j} - 3 = 0\,.$$

En remarquant que $z^2+2(1-\mathrm{j})\,z$ représente les deux premiers termes du développement d'un carré, on obtient :

$$z^2 + 2(1-\mathrm{j})\,z = [z+(1-\mathrm{j})]^2 - (1-\mathrm{j})^2 .$$

L'équation devient :

$$(z+1-\mathrm{j})^2-(1-\mathrm{j})^2-6\mathrm{j}-3 = 0$$

ou

$$(z+1-\mathrm{j})^2-3-4\mathrm{j} = 0$$
$$(z+1-\mathrm{j})^2 = 3+4\mathrm{j}.$$

En posant

$$Z = z+1-\mathrm{j}$$

on a

$$Z^2 = 3+4\mathrm{j}.$$

On détermine Z par la méthode vue au nº 4.12 :

$$Z_1 = 2+\mathrm{j}, \qquad Z_2 = -2-\mathrm{j}.$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = 2+\mathrm{j}+\mathrm{j}-1 = 1+2\mathrm{j},$$
$$z_2 = -2-\mathrm{j}+\mathrm{j}-1 = -3.$$

— Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ est à coefficients réels, dans le cas où le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est négatif, le nombre Δ admet dans **C**, deux racines opposées que nous écrivons sous la forme $\pm\,\mathrm{j}\sqrt{-\Delta}$. Les solutions s'écrivent

$$x = \frac{-b\pm\mathrm{j}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

et sont complexes conjuguées.

Ainsi, l'équation

$$x^2+2x+7 = 0$$

admet pour solutions

$$x_1 = -1+\mathrm{j}\sqrt{6}, \qquad x_2 = -1-\mathrm{j}\sqrt{6}.$$

— Dans tous les cas, on peut utiliser les formules classiques sur l'équation du second degré. Voyons-le sur un exemple.

Soit à résoudre l'équation

$$\mathrm{j}x^2+(4-3\mathrm{j})\,x-7-\mathrm{j} = 0.$$

Nous calculons le discriminant :

$$\Delta = (4-3\mathrm{j})^2+4\mathrm{j}(7+\mathrm{j}) = 3+4\mathrm{j},$$

et nous déterminons (par la méthode ci-dessus) un nombre complexe δ tel que

$$\delta^2 = 3+4\mathrm{j}\,;$$

on prendra, par exemple,

$$\delta = \mathrm{j}(1-2\mathrm{j}) = 2+\mathrm{j}\,.$$

Les solutions sont alors

$$x_1 = \frac{-4+3\mathrm{j}+(2+\mathrm{j})}{2\mathrm{j}}, \qquad x_2 = \frac{-4+3\mathrm{j}-(2+\mathrm{j})}{2\mathrm{j}},$$

soit

$$x_1 = \mathrm{j}+2, \qquad x_2 = 3\mathrm{j}+1.$$

4.14 Exponentielle à exposant complexe. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin (après l'étude des séries), nous définissons $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$ comme le nombre complexe de module 1 et d'argument x :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x+\mathrm{j}\sin x}\,.$$

C'est la *formule d'Euler.* De même en remplaçant j par $-\mathrm{j}$, on obtient

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x\,.$$

Ainsi

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = 2(\cos\pi/4+\mathrm{j}\sin\pi/4) = \sqrt{2}(1+\mathrm{j})$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = \cos\pi+\mathrm{j}\sin\pi = -1\,.$$

La règle donnant l'argument d'un produit prend alors une forme d'une particulière simplicité. On a en effet

$$(\cos x+\mathrm{j}\sin x)(\cos x'+\mathrm{j}\sin x') = \cos(x+x')+\mathrm{j}\sin(x+x'),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}x'} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(x+x')}}\,.$$

Cette formule est très facile à retenir, car elle ressemble à la formule pour la multiplication des puissances d'un même nombre.

4.15 Représentation par une exponentielle d'un nombre complexe. Considérons le nombre complexe

$$z = r(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)\,.$$

Il s'écrit en utilisant l'exponentielle complexe

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

Le produit de deux nombres complexes

$$z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$$

s'écrit

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}.$$

De même

$$(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}.$$

4.16 Application trigonométrique des formules d'Euler. A partir des formules

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x$$

on obtient par addition et soustraction

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2} \\ \sin x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}} \end{aligned}}$$

Ces formules nous serviront dans le calcul intégral. Montrons-en dès maintenant une application au calcul de $\cos^m x$ et de $\sin^m x$, où $m \in \mathbf{N}$.

Calcul de $\cos^m x$ et de $\sin^m x$.

1. On a

$$\cos^m x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})^m.$$

Il suffit de développer $(a+b)^m$ par la formule du binôme, puis de grouper les termes convenablement.

— Soit, par exemple, à calculer $\cos^4 x$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})^4 = \frac{1}{16}\,(\mathrm{e}^{4\mathrm{j}x}+4\mathrm{e}^{3\mathrm{j}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} + 6\mathrm{e}^{2\mathrm{j}x}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{j}x}).$$

Effectuons les produits d'exponentielles

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}\,(e^{4jx} + 4e^{2jx} + 6 + 4e^{-2jx} + e^{-4jx}),$$

additionnons les termes équidistants des extrêmes :

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}\,[(e^{4jx}+e^{-4jx}) + 4(e^{2jx}+e^{-2jx}) + 6]\,;$$

or, d'après les formules d'Euler, la première parenthèse est égale à $2\cos 4x$ et la seconde à $2\cos 2x$. On aura donc

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}\,[2\cos 4x + 4 \times 2\cos 2x + 6]$$

ou enfin

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\,[\cos 4x + 4\cos 2x + 3]\,.$$

2. De même, on aurait

$$\sin^m x = \left(\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}\right)^m = \frac{1}{(2j)^m}\,(e^{jx}-e^{-jx})^m,$$

on développerait $(a-b)^m$, et, comme plus haut, en groupant certains termes tous les j disparaissent.

— Calculons, par exemple, $\sin^5 x$:

$$\sin^5 x = \frac{1}{(2j)^5}\,(e^{jx}-e^{-jx})^5$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{32j^5}\,(e^{5jx} - 5e^{4jx}e^{-jx} + 10e^{3jx}e^{-2jx} - $$
$$- 10e^{2jx}e^{-3jx} + 5e^{jx}e^{-4jx} - e^{-5jx})$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{32j^5}\,(e^{5jx} - 5e^{3jx} + 10e^{jx} - 10e^{-jx} + 5e^{-3jx} - e^{-5jx}).$$

Groupons les termes équidistants des extrêmes :

$$\sin^5 x = \frac{1}{32j^5}\,[(e^{5jx}-e^{-5jx}) - 5(e^{3jx}-e^{-3jx}) + 10(e^{jx}-e^{-jx})]\,;$$

or, d'après les formules d'Euler, la première parenthèse est égale à 2j sin $5x$, la deuxième à 2j sin $3x$ et la dernière à 2j sin x, ce qui donne

$$\sin^5 x = \frac{1}{32\mathrm{j}^5}\,[2\mathrm{j}\sin 5x - 10\mathrm{j}\sin 3x + 20\mathrm{j}\sin x]$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{32\mathrm{j}^4}\,(2\sin 5x - 10\sin 3x + 20\sin x)$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\,(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)\,.$$

Par de tels procédés, on retrouve très facilement tout le formulaire usuel de trigonométrie, rassemblé aux pages finales de ce tome.

4.17 Représentation d'une grandeur sinusoïdale par un nombre complexe

1. Considérons la fonction sinusoïdale

$$x = a\cos(\omega t + \varphi)$$

d'amplitude a, de pulsation ω. Dans le plan xOy, il lui correspond à chaque valeur de t un vecteur $\boldsymbol{OM}$ de longueur a et d'angle polaire

$$(\boldsymbol{Ox},\ \boldsymbol{OM}) = \omega t + \varphi\,.$$

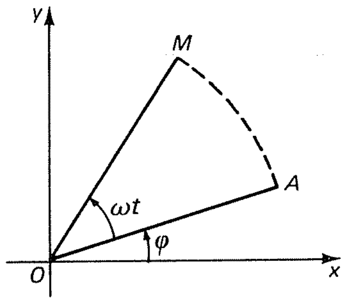


FIG. 4.8

Si M' est la projection orthogonale de M sur Ox,

$$\overline{OM'} = x = a\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

La méthode de Fresnel consiste à représenter la vibration sinusoïdale $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, à partir d'un axe Ox, appelé axe origine des phases, par un vecteur $\boldsymbol{OA}$ tel que

$$(\boldsymbol{Ox},\ \boldsymbol{OA}) = \varphi\,, \qquad OA = a\,.$$

Ce vecteur $\boldsymbol{OA}$ n'est autre que la représentation de $\boldsymbol{OM}$ pour $t=0$. (Tout se passe comme si le vecteur $\boldsymbol{OA}$ tournait autour de O, avec une vitesse angulaire ω.)

— Si X et Y sont les composantes de $\boldsymbol{OM}$ sur les axes :

$$X = a\cos(\omega t+\varphi),$$
$$Y = a\sin(\omega t+\varphi).$$

Donc

$$X+\mathrm{j}Y = a[\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{j}\sin(\omega t+\varphi)] = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}.$$

Le point M est l'image du nombre complexe $a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$.

L'expression $\mathscr{A} = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ *qui admet le vecteur* $\boldsymbol{OA}$ *pour image représente l'amplitude complexe de la vibration sinusoïdale*

$$x = a\cos(\omega t+\varphi).$$

Ainsi, l'amplitude complexe de la vibration sinusoïdale

$$x = 5\cos(\omega t+\pi/3) \quad \text{est} \quad \mathscr{A} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}.$$

L'amplitude complexe de la vibration sinusoïdale

$$x = 3\sin\omega t = 3\cos(\omega t-\pi/2) \quad \text{est} \quad \mathscr{A} = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -3\mathrm{j}.$$

2. *Composition de deux vibrations sinusoïdales de même pulsation.* Soient

$$x_1 = a_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = a_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

deux vibrations sinusoïdales de même pulsation ω, représentées par leurs vecteurs images $\boldsymbol{OA}_1$ et $\boldsymbol{OA}_2$. Les amplitudes complexes sont

$$\mathscr{A}_1 = a_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2 = a_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}.$$

La vibration résultante est définie par le vecteur $\boldsymbol{OA}$ (Fig. 4.9) tel que

$$\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OA}_1 + \boldsymbol{OA}_2.$$

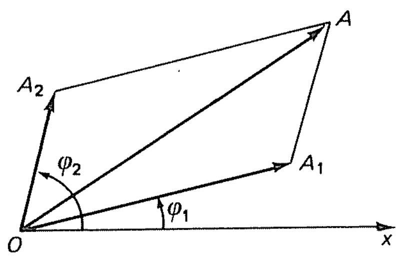


Fig. 4.9

Son amplitude complexe $\mathscr{A}$ est donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = a_1\,e^{j\varphi_1} + a_2\,e^{j\varphi_2},$$

$$\mathscr{A} = a_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) + a_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2),$$

soit

$$\mathscr{A} = (a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2) + j(a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2).$$

L'amplitude a de la vibration résultante est

$$a = \sqrt{(a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2)^2 + (a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2)^2}.$$

L'angle de déphasage φ admet pour tangente :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}.$$

L'expression de la vibration est donc :

$$x = a\cos(\omega t + \varphi).$$

3. *Composition de n vibrations sinusoïdales de même amplitude a et dont les phases sont en suite arithmétique de raison φ.* On donne les vibrations

$$\begin{aligned} x_1 &= a\cos\omega t \\ x_2 &= a\cos(\omega t + \varphi) \\ x_3 &= a\cos(\omega t + 2\varphi) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a\cos[\omega t + (n-1)\varphi]. \end{aligned}$$

La figure 4.10 représente la résultante, par la construction de Fresnel, des trois premières vibrations :

$$\boldsymbol{OA}_3 = \boldsymbol{OA}_1 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3.$$

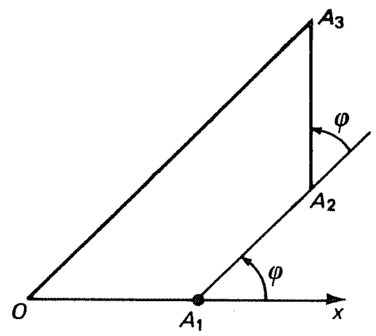


FIG. 4.10

L'amplitude complexe $\mathscr{A}$ de la somme est définie par

$$\mathscr{A} = a + a\,e^{j\varphi} + a\,e^{2j\varphi} + a\,e^{3j\varphi} + \dots + a\,e^{(n-1)j\varphi},$$

$$\mathscr{A} = a(1+e^{j\varphi}+e^{2j\varphi}+e^{3j\varphi}+ \dots +e^{(n-1)j\varphi}).$$

La somme S des termes de la suite géométrique de premier terme 1, de raison $e^{j\varphi}$ est :

$$S = \frac{1-e^{jn\varphi}}{1-e^{j\varphi}}.$$

Donc

$$\mathscr{A} = a\,\frac{1-e^{jn\varphi}}{1-e^{j\varphi}} = a\,\frac{e^{jn\varphi/2}(e^{-jn\varphi/2}-e^{jn\varphi/2})}{e^{j\varphi/2}(e^{-j\varphi/2}-e^{j\varphi/2})}$$

$$\mathscr{A} = a\,e^{j(n-1)\varphi/2}\,\frac{\sin n\varphi/2}{\sin\varphi/2}.$$

La vibration résultante est donc

$$x = a\,\frac{\sin n\varphi/2}{\sin\varphi/2}\cos[\omega t + (n-1)\,\varphi/2].$$

4.18 Représentation exponentielle de la dérivée d'une fonction sinusoïdale. Soit la vibration sinusoïdale $x = a\cos(\omega t+\varphi)$, d'amplitude complexe $\mathscr{A} = a\,e^{j\varphi}$, représentée vectoriellement par $\boldsymbol{OA}$ (Fig. 4.11).

$$dx/dt = -\omega a\sin(\omega t+\varphi) = \omega a\cos(\omega t + \varphi + \pi/2).$$

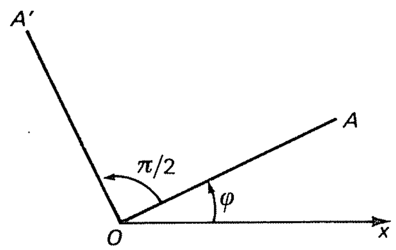


FIG. 4.11

Cette fonction est représentée vectoriellement par le vecteur $\boldsymbol{OA'}$, de module ωa et tel que

$$(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OA'}) = \pi/2.$$

L'amplitude complexe de la fonction dérivée est

$$\mathscr{A}' = \omega a\,e^{j(\varphi+\pi/2)}.$$

Ces expressions servent couramment en électricité dans l'étude du courant alternatif.

Remarque importante. Nous verrons différentes applications des nombres complexes dans le calcul intégral (tome 3), ainsi que dans les équations différentielles (tome 4). Nous les utiliserons dans certaines applications électriques à ce moment.

4.19 Applications à l'électricité

1. Supposons une ligne téléphonique très longue où la différence de potentiel à l'entrée est

$$v = V \cos \omega t .$$

On démontre que le courant s'exprime par :

$$i^2 = V^2 \frac{g + \mathrm{j} c\omega}{r + \mathrm{j} l\omega} \cos^2 \omega t$$

où r est la résistance par unité de longueur (les deux fils ensemble),
l est l'inductance par unité de longueur,
c est la capacité par unité de longueur, des deux fils entre eux,
g est la conductance de fuite $(1/r')$ par unité de longueur, entre les deux fils.

Calculer l'intensité i du courant.

— Considérons les nombres complexes sous la forme trigonométrique :

$$g + \mathrm{j} c\omega = \sqrt{g^2 + c^2 \omega^2}\,(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha), \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{tg}\alpha = c\omega/g,$$
$$r + \mathrm{j} l\omega = \sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}\,(\cos\beta + \mathrm{j}\sin\beta), \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{tg}\beta = l\omega/r,$$

et

$$V^2 \frac{g + jc\omega}{r + \mathrm{j} l\omega} = V^2 \left(\frac{g^2 + c^2 \omega^2}{r^2 + l^2 \omega^2}\right)^{1/2} \frac{\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha}{\cos\beta + \mathrm{j}\sin\beta}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$A = \left(\frac{g^2 + c^2 \omega^2}{r^2 + l^2 \omega^2}\right)^{1/4};$$

alors

$$i^2 = A^2 V^2 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}} = (A V \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\beta)/2})^2 .$$

Le déphasage de i sur v est donc $(\alpha - \beta)/2$ et on aura, en valeur réelle

$$i = AV \cos\left[\omega t + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right].$$

Application numérique. Pour une ligne de 1 km de long, on a :

$$r = 6 \text{ ohms}, \quad l = 3\times 10^{-3} \text{ henry}, \quad c = 5\times 10^{-9} \text{ farad},$$

$$g = \frac{1}{r'} = 3\times 10^{-6} \text{ ohm}^{-1}, \quad \omega = 6\times 10^3, \quad V = 1 \text{ volt}.$$

On a

$$A = \left[\frac{9\times 10^{-12}+25\times 10^{-18}\times 36\times 10^6}{36+9\times 10^{-6}\times 36\times 10^6}\right]^{1/4} = 1{,}26\times 10^{-3},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5\times 10^{-9}\times 6\times 10^3}{3\times 10^{-6}} = 10, \qquad \alpha = 84°17',$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3\times 10^{-3}\times 6\times 10^3}{6} = 3, \qquad \beta = 71°34',$$

et

$$(\alpha-\beta)/2 = 6°21'.$$

On aura alors, en ampères, pour l'intensité du courant :

$$i = 1{,}26\times 10^{-3}\cos(6\,000t+6°21')$$

ou, en milliampères,

$$i = 1{,}26\cos(6\,000t+6°21').$$

Remarque. Le quotient V/I des valeurs maximales s'appelle l'*impédance caractéristique* de la ligne, soit ici

$$Z^2 = \frac{r+\mathrm{j}l\omega}{g+\mathrm{j}c\omega},$$

ou, en module,

$$|Z| = \sqrt[4]{\frac{r^2+l^2\omega^2}{g^2+c^2\omega^2}}.$$

En général, dans une bonne ligne, bien isolée,

$$r^2 \ll l^2\omega^2 \quad \text{et} \quad g^2 \ll c^2\omega^2,$$

d'où

$$\boxed{|Z| = \sqrt{l/c}},$$

valeur indépendante de la fréquence, ce qui est remarquable.

2. On considère un élément de circuit électrique, parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω. Soit

R la résistance de l'élément,
C sa capacité,
L son inductance.

On sait alors que la différence de potentiel est représentée par le nombre complexe

$$v = Ri + \mathrm{j}\, i(L\omega - 1/C\omega)$$

où i désigne l'intensité dans le circuit.

Le nombre complexe

$$Z = R + \mathrm{j}(L\omega - 1/C\omega) = v/i$$

est appelé *impédance* de l'élément de circuit. On a alors

$$|Z| = \left|\frac{v}{i}\right| = \frac{V_e}{I_e};$$

d'où :

a) la d.d.p. efficace :

$$\begin{aligned} V_e &= |Z|\, I_e \\ &= I_e \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}\,; \end{aligned}$$

b) le déphasage, qui est l'argument principal φ de v, tel que

$$\cos\varphi = \frac{R}{|Z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{|Z|}$$

d'où :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}.$$

Application numérique

Soit un élément de circuit dont on donne :

— la résistance $R = 500$ ohms,
— la capacité $C = 0{,}5 \times 10^{-6}$ farad,
— l'inductance $L = 2$ henrys.

On lui applique un courant de pulsation $\omega = 100\pi$, sous une d.d.p. efficace de 220 volts. Déterminer l'impédance, l'intensité efficace et le déphasage.

Les formules ci-dessus donnent :

$$Z = 500 + \mathrm{j}\left(200\pi - \frac{1}{50\pi 10^{-6}}\right)$$

soit environ

$$Z = 500 - 5740\,\mathrm{j},$$

d'où

$$|Z|^2 = 500^2 + 5740^2 = 33\,197\,600$$

et

$$|Z| = 5\,760 \text{ ohms.}$$

Par suite

$$I_e = 220/5\,760 = 0{,}038 \text{ ampère},$$

tandis que

$$\operatorname{tg}\varphi = -\,5\,740/500 = -\,11{,}48.$$

4.20 Montages en série ou en parallèle. Soient des éléments de circuits d'impédances respectives $z_1, z_2, \dots z_n$. On montre que l'impédance équivalente Z est :

- dans le cas d'un montage en série :

$$Z = z_1 + z_2 + \dots + z_n;$$

- dans le cas d'un montage en parallèle, telle que

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}.$$

EXEMPLE. Soit le montage suivant :

λ est une inductance pure de 0,5 henry.
A est un élément de résistance 3 ohms, de capacité $0{,}1 \times 10^{-6}$ farad.
γ est une capacité pure de $0{,}2 \times 10^{-6}$ farad.
ρ est une résistance pure de 10 ohms.

B et C sont deux éléments identiques dont les caractéristiques sont :

résistance : 2 ohms
inductance : 1 henry
capacité : 16×10^{-6} farad

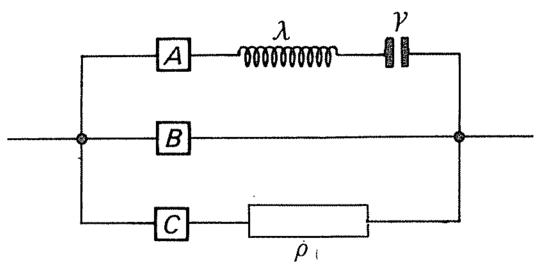


FIG. 4.12

Déterminer l'impédance équivalente dans le cas où $\omega = 10\,000$ radians par seconde.

- λ, A et γ sont montés en série. L'impédance équivalente est donc où

$$Z_1 = (0{,}5\,\omega \mathrm{j}) + \left(3 - \frac{\mathrm{j}}{0{,}1 \times 10^{-6}\,\omega}\right) - \left(\frac{\mathrm{j}}{0{,}2 \times 10^{-6}\,\omega}\right)$$

$$= 3 + \mathrm{j}\left(0{,}5\,\omega - \frac{3}{2\,\omega\,10^{-7}}\right).$$

- ρ et C sont montés en série. L'impédance équivalente est donc

$$Z_2 = 10 + \left(2 + \mathrm{j}\omega - \frac{\mathrm{j}}{16 \times 10^{-6}\,\omega}\right)$$

$$= 12 + \mathrm{j}\left(\omega - \frac{1}{16 \times 10^{-6}\,\omega}\right)$$

- B a pour impédance

$$Z_3 = 2 + \mathrm{j}\left(\omega - \frac{1}{16 \times 10^{-6}\,\omega}\right).$$

Il reste à trouver l'impédance Z résultant du montage en parallèle des trois éléments ainsi étudiés :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Calculons d'abord les carrés des modules

$$|Z_1|^2 = 3^2 + \left(5\,000 - \frac{3}{2 \times 10^{-3}}\right)^2 = 1{,}22 \times 10^7$$

$$|Z_2|^2 = 12^2 + \left(10\,000 - \frac{1}{16 \times 10^{-2}}\right)^2 = 9{,}99 \times 10^7$$

$$|Z_3|^2 = 2^2 + \left(10\,000 - \frac{1}{16 \times 10^{-2}}\right)^2 = 9{,}99 \times 10^7.$$

Alors

$$\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}_1}{|Z_1|^2} + \frac{\bar{Z}_2}{|Z_2|^2} + \frac{\bar{Z}_3}{|Z_3|^2} = 3{,}86 \times 10^{-7} - 4{,}86 \times 10^{-4}\mathrm{j}$$

et

$$Z = 1{,}63 + 2{,}06 \times 10^3\mathrm{j}.$$

EXERCICES

Forme cartésienne

Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

4.1 $(2-j)(3+j)(2j+1)$.

4.2 $25/(3j-4)$.

4.3 $\dfrac{5j+2}{3j+5}(5j-2)$.

4.4 $(2+j)^2$.

4.5 $(1-j)^3$.

4.6 $2/(1-j)$.

4.7 $(5-j)/(4+j)$.

4.8 $e^{-214j\pi}+e^{4j\pi}$.

4.9 $(5-8j)(2-5j)(2-3j)$.

4.10 $\dfrac{50+9j}{5-8j}$.

4.11 $(5+4j)(3+7j)(2-3j)$.

4.12 $(7-2j)(5j-3)(8+3j)$.

4.13 $(15+7j)^2$.

4.14 $(9+13j)^2$.

4.15 $(12-19j)^2$.

4.16 $(15-8j)^2$.

Racines carrées et cubiques

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

4.17 $15-8j$.

4.18 $1+j$.

4.19 $3+4j$.

4.20 $9+40j$.

4.21 $7-24j$.

4.22 $7+24j$.

4.23 $1-\sqrt{3}j$.

4.24 $7+6\sqrt{2}j$.

4.25 $2-4\sqrt{6}j$.

4.26 $-4j$.

Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

4.27 $2+11j$.

4.28 ω.

Équations

Résoudre les équations suivantes :

4.29 $z^2-5(1+j)z+17j=0$.

4.30 $z^2-(2j+1)z+j-1=0$.

4.31 $z^2+2(1+j)z+4j=0$.

4.32 $z^2-6z+11=0$.

4.33 $jz^2-2jz+j-2=0$.

4.34 $2z^2-(3+2j)z+5=0$.

4.35 $z^2/2-\sqrt{3}z+2=0$.

4.36 $z^2+8(1-j)z-34j=0$.

4.37 $z^2-(5+2j)z+5(1+j)=0$.

4.38 $z^2-2z+1-2j=0$.

4.39 $z^2+jz+1=0.$ **4.40** $\bar{z}=z^2.$

4.41 Trouver les couples (a, b) de nombres réels tels que le nombre complexe $1+j$ soit solution de l'équation

$$z^7+az^5+b=0.$$

4.42 Trouver les couples (n, p) d'entiers naturels non nuls tels que les équations

$$z^n=1 \qquad \text{et} \qquad (z+1)^p=1$$

aient une racine commune.

CHAPITRE 5

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE

5.1 Lois de composition externes. Dans la vie courante, il est rare que la multiplication apparaisse comme une loi de composition interne : le prix total de α livres à x francs pièce se calcule en formant α fois x francs. C'est un nombre de francs exprimé par αx. Mais il est clair que α et x ne jouent pas des rôles symétriques : α est un opérateur sur l'ensemble des nombres de francs. (Il se trouve que $\alpha x = x\alpha$, ce qui entraîne une confusion regrettable entre l'opérateur α et l'élément x.)

Soient E et Ω deux ensembles. On appelle *loi de composition externe* sur E une application de $\Omega \times E$ dans E qui, au couple (α, x), associe un élément de E, souvent noté αx. L'ensemble Ω s'appelle *domaine d'opérateurs.*

EXEMPLES.

1. Lorsque $\Omega = E$, on retrouve le cas des lois de composition internes.

2. Soient E le plan de la géométrie élémentaire, et Ω l'ensemble des transformations ponctuelles de E (c'est-à-dire l'ensemble des applications de E dans lui-même). L'application qui à une transformation ponctuelle α et à un point x de E associe le transformé de x par α est une loi de composition externe.

3. Soient E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, et Ω l'ensemble des homothéties de E. L'application qui au couple constitué d'un nombre réel α et d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ associe l'homothétique, noté $\alpha\boldsymbol{x}$, de $\boldsymbol{x}$ dans l'homothétie de rapport α, est une loi de composition externe.

5.2 Espaces vectoriels. Voyons d'abord sur un exemple simple et bien connu cette structure très importante.

Soit n un entier naturel non nul. On munit l'ensemble $\mathbf{R}^n$ (c'est-à-dire l'ensemble des suites de n nombres réels) des deux lois définies par les formules ci-dessous :

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n), \qquad (1)$$

$$\alpha(u_1, u_2, \dots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n). \qquad (2)$$

Ces lois possèdent les propriétés suivantes :

L'addition fait de $\mathbf{R}^n$ un groupe commutatif, dont l'élément neutre est $(0, 0, \dots, 0)$.
L'opposé d'un élément $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est l'élément $(-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$.

Pour tout élément $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbf{R}^n$,

$$1 \,.\, (u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Pour tout élément $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et pour tout couple (α, β) de nombres réels,

$$\alpha[\beta(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = (\alpha\beta) . (u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

$$(\alpha+\beta) . (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \beta(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Pour tout couple $[(u_1, u_2, \ldots, u_n), (v_1, v_2, \ldots, v_n)]$ d'éléments de $\mathbf{R}^n$, et pour tout nombre réel α,

$$\alpha[(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)] = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \alpha(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Les vérifications présentent toutes la même simplicité. Par exemple,

$$(\alpha+\beta) . (u_1, u_2, \ldots, u_n) = [(\alpha+\beta) u_1, (\alpha+\beta) u_2, \ldots, (\alpha+\beta) u_n]$$

$$\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \beta(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1+\beta u_1, \alpha u_2+\beta u_2, \ldots, \alpha u_n+\beta u_n).$$

L'égalité cherchée résulte aussitôt de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbf{R}$.

Cette proposition s'applique en particulier aux cas où $n=2$ et où $n=3$; elle s'applique aussi au cas où $n=1$, l'ensemble $\mathbf{R}^n$ se réduisant alors à l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels.

Cet exemple fondamental conduit à poser la définition suivante :

Soit K un corps commutatif. On appelle *espace vectoriel* sur K un ensemble E muni d'une structure algébrique définie par la donnée de deux lois de composition :

— une loi interne, application de $E \times E$ dans E, notée additivement

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} ;$$

— une loi externe, application de $K \times E$ dans E, notée multiplicativement

$$(\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha\boldsymbol{x} \qquad \text{ou encore} \qquad (\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha . \boldsymbol{x} ;$$

ces deux lois satisfaisant aux conditions suivantes :

1. L'ensemble E muni de l'addition est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est noté $\boldsymbol{0}$.

2. Pour tout élément $\boldsymbol{x}$ de E,

$$1 . \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} ;$$

pour tout couple (α, β) d'éléments de K et pour tout élément $\boldsymbol{x}$ de E,

$$\alpha . (\beta . \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta) . \boldsymbol{x} .$$

3. Pour tout couple (α, β) d'éléments de K et pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ d'éléments de E,

$$(\alpha+\beta) . \boldsymbol{x} = \alpha . \boldsymbol{x} + \beta . \boldsymbol{x},$$

$$\alpha . (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha . \boldsymbol{x} + \alpha . \boldsymbol{y} .$$

Les éléments d'un espace vectoriel sont souvent appelés *vecteurs*. Dans toute la suite, on désigne par K un corps commutatif; les éléments de K sont appelés *scalaires*. (En pratique, K est soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.)

Un espace vectoriel, étant un groupe pour l'addition, n'est jamais vide.

EXEMPLES.

1. Soit E un ensemble à un seul élément, noté $\mathit{0}$. Muni des deux lois définies par

$$\mathit{0} + \mathit{0} = \mathit{0}$$

$$\alpha \mathit{0} = \mathit{0}.$$

$\{\mathit{0}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

2. Munis des lois précédemment définies, les ensembles $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^n$, sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. En particulier, $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel sur lui-même.

Plus généralement, muni des lois définies par les formules (1) et (2), K^n est un espace vectoriel sur K.

3. *Espaces vectoriels d'applications.* Soient A un ensemble non vide et F un espace vectoriel sur K. On munit l'ensemble $\mathscr{F}(A, F)$ des applications de A dans F des deux lois suivantes :

— étant données deux applications f et g de A dans F, $f+g$ associe à tout élément x de A l'élément $f(x)+g(x)$ de F :

$$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x)\,;$$

— étant donnés un scalaire α et une application f de A dans F, αf associe à tout élément x de A l'élément $\alpha f(x)$ de F :

$$(\alpha f)\,(x) = \alpha f(x).$$

Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathscr{F}(A, F)$ est un espace vectoriel sur K, appelé espace vectoriel des applications de A dans F. L'élément neutre de l'addition est l'application nulle, notée 0.

Vérifions par exemple la distributivité de la multiplication externe par rapport à l'addition : pour tout couple (α, β) de scalaires, pour tout élément f de $\mathscr{F}(A, F)$,

$$(\alpha+\beta)\,f = \alpha f + \beta f.$$

En effet, par définition des lois sur $\mathscr{F}(A, F)$, l'application $(\alpha+\beta)\,f$ associe à tout élément x de A l'élément $(\alpha+\beta)\,.\,f(x)$ de F, et l'application $\alpha f+\beta f$ associe à tout élément x de A l'élément $\alpha\,.\,f(x) + \beta\,.\,f(x)$. Enfin, puisque F est un espace vectoriel,

$$(\alpha+\beta)\,.\,f(x) = \alpha\,.\,f(x) + \beta\,.\,f(x).$$

Prenant même valeur pour tout élément x de A, les deux applications $(\alpha+\beta)\,f$ et $\alpha f+\beta f$ sont égales.

Prenons en particulier pour A l'intervalle $[1, n]$ de $\mathbf{N}$, et pour F l'ensemble des réels, considéré comme espace vectoriel sur lui-même. L'espace vectoriel $\mathscr{F}(A, F)$ n'est autre que l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$.

Prenons maintenant pour A l'ensemble **N**, et pour F le corps **C** des nombres complexes, considéré comme espace vectoriel sur lui-même; les applications de **N** dans **C** sont les suites de nombres complexes. Nous pouvons affirmer que, muni des deux lois précédentes, l'ensemble des suites de nombres complexes est un espace vectoriel sur **C**.

5.3 Règles de calcul dans les espaces vectoriels. Soit E un espace vectoriel sur K.

1. Pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E,

$$0 . \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

Pour tout scalaire α,

$$\alpha . \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

2. Réciproquement, la relation

$$\alpha . \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

implique soit $\alpha = 0$, soit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Pour établir la relation (1), écrivons

$$(0+0) . \boldsymbol{x} = 0 . \boldsymbol{x} + 0 . \boldsymbol{x},$$

soit

$$0 . \boldsymbol{x} = 0 . \boldsymbol{x} + 0 . \boldsymbol{x};$$

comme E est un groupe pour l'addition, nous pouvons simplifier les deux membres par $0 . \boldsymbol{x}$, d'où le résultat cherché.

De même,

$$\alpha . (\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = \alpha . \boldsymbol{0} + \alpha . \boldsymbol{0},$$

soit

$$\alpha . \boldsymbol{0} = \alpha . \boldsymbol{0} + \alpha . \boldsymbol{0},$$

d'où la relation (2).

Soit réciproquement $(\alpha, \boldsymbol{x})$ un élément de $K \times E$ tel que

$$\alpha . \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Supposons α non nul; comme K est un corps, α admet un inverse β.

Multiplions les deux membres de la relation précédente par β :

$$\beta . (\alpha . \boldsymbol{x}) = \beta . \boldsymbol{0};$$

mais

$$\beta . (\alpha . \boldsymbol{x}) = (\beta\alpha) . \boldsymbol{x} = 1 . \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

et

$$\beta . \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0};$$

d'où

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} .$$

5.4 Sous-espaces vectoriels. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une suite finie de vecteurs d'un espace vectoriel E sur K. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des vecteurs x_i s'il existe une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires telle que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i .$$

On peut étendre cette définition au cas d'une famille quelconque de vecteurs de E de la manière suivante : on appelle *support* d'une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de scalaires l'ensemble J des éléments i de I tels que $\alpha_i \neq 0$. Lorsque J est fini, on dit que la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est à *support fini.*

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des vecteurs x_i s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de scalaires à support fini J telle que

$$x = \sum_{i \in J} \alpha_i x_i ,$$

ce qu'on note encore

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i .$$

(Lorsque J est vide, on convient que le second membre représente le vecteur nu de E.)

On appelle *relation linéaire* entre les vecteurs x_i une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de scalaires à support fini telle que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 .$$

Il existe toujours une relation linéaire entre les vecteurs x_i, à savoir la suite nulle; cette relation linéaire est dite *triviale.*

Soient E un espace vectoriel sur K, et E' une partie de E. On dit que E' est un *sous-espace vectoriel* de E si E' est stable pour les deux lois de E (c'est-à-dire si la somme de deux éléments de E', et le produit d'un élément de E' par un scalaire, sont encore des éléments de E'), et si, muni des restrictions à $E' \times E'$ et à $K \times E'$ des lois de E, E' est un espace vectoriel sur K.

Un sous-espace vectoriel de E n'est donc jamais vide.

Comme pour les sous-groupes, on peut caractériser les sous-espaces vectoriels. Soit E' une partie non vide d'un espace vectoriel E sur K. Pour que E' soit un sous-espace vectoriel de E, il faut et il suffit que E' soit stable pour les deux lois de E, autrement dit, que, pour tout couple (x, y) d'éléments de E' et pour tout couple (α, β) de scalaires, $\alpha x + \beta y$ appartienne à E'.

Cette condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons cette condition satisfaite, et montrons que les restrictions des lois de E munissent E' d'une structure d'espace vectoriel.

Prenons en effet $\alpha = \beta = 0$; le vecteur nul appartient à E', donc l'addition sur E' admet un élément neutre. Prenons maintenant $\alpha = 0$, $\beta = -1$; nous voyons ainsi que tout élément $\boldsymbol{y}$ de E' admet un opposé (dans E'). L'associativité de l'addition sur E' résulte immédiatement de l'associativité de l'addition sur E. Nous voyons donc que E' est un groupe commutatif.

Enfin, les relations

$$\begin{aligned} 1 \,.\, \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, \\ \alpha \,.\, (\beta \,.\, \boldsymbol{x}) &= (\alpha\beta) \,.\, \boldsymbol{x}, \\ (\alpha+\beta) \,.\, \boldsymbol{x} &= \alpha \,.\, \boldsymbol{x} + \beta \,.\, \boldsymbol{x}, \\ \alpha \,.\, (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \alpha \,.\, \boldsymbol{x} + \alpha \,.\, \boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

étant vraies pour les éléments de E, le sont pour les éléments de E'.

Il en résulte immédiatement qu'étant donnée une famille $(E_i')_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E, l'intersection $E' = \bigcap_{i\in I} E_i'$ de cette famille est encore un sous-espace vectoriel de E.

En effet, E', contenant le vecteur nul de E, est une partie non vide de E. De plus, pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de vecteurs de E', et pour tout couple (α, β) de scalaires, le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient à E_i' pour tout élément i de I, et donc à E'. La proposition permet de conclure.

Rapprochons maintenant ces notions de celle de combinaison linéaire, que nous avons vue plus haut :

Soit $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur K. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ admet un plus petit élément (au sens de la relation d'inclusion), à savoir l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$; on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in I}$. Ce sous-espace vectoriel n'est autre que l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$.

En effet, l'intersection E' de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ est encore un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$.

On vérifie aisément par récurrence sur le nombre de scalaires α_i non nuls que toute combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ appartient à E'. Pour prouver que E' est contenu dans l'ensemble E'' des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, il suffit de montrer que E'' est un sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$. Soit j un élément de I; en posant $\alpha_i = 1$ si $i = j$ et $\alpha_i = 0$ dans le cas contraire, nous voyons que $\boldsymbol{x}_j$ appartient à E''. Soient enfin $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in I} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ et $\boldsymbol{y} = \sum_{i\in I} \beta_i \boldsymbol{x}_i$ deux éléments de E'', λ et μ deux scalaires; alors

$$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} = \sum_{i\in I} (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)\, \boldsymbol{x}_i,$$

ce qui montre que E'' est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples.

1. Pour tout espace vectoriel E, la partie de E réduite au vecteur nul et l'espace vectoriel E tout entier sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Prenons pour E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. Il est immédiat que l'ensemble des vecteurs de la forme $(u_1, 0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Il en est de même des ensembles de vecteurs des formes suivantes :

$$(0, u_2, 0),$$
$$(0, 0, u_3),$$
$$(u_1, u_2, 0),$$
$$(u_1, 0, u_3),$$
$$(0, u_2, u_3).$$

Mais il existe des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ qui ne sont pas des types précédents.

3. L'ensemble des fonctions affines, c'est-à-dire des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la forme

$$x \mapsto ax+b,$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

De même, l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2, c'est-à-dire des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la forme

$$x \mapsto ax^2+bx+c,$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Les vérifications sont laissées au lecteur.

5.5 Applications linéaires. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. On dit qu'une application U de E dans F est linéaire si, pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de vecteurs de E et pour tout couple (α, β) de scalaires,

$$U(\alpha\, \boldsymbol{x}+\beta\, \boldsymbol{y}) = \alpha\, U(\boldsymbol{x}) + \beta\, U(\boldsymbol{y}).$$

Il s'ensuit que $U(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ (le symbole $\boldsymbol{0}$ désignant à la fois le vecteur nul de E et le vecteur nul de F).

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même s'appelle *endomorphisme* de E.

EXEMPLE. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2, c'est-à-dire des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la forme

$$f : x \mapsto ax^2+bx+c.$$

Soit F l'espace vectoriel des fonctions affines, c'est-à-dire des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la forme

$$x \mapsto ax+b.$$

La dérivation est une application linéaire de E dans F.

Nous savons que la dérivée de f est

$$f' : x \mapsto 2ax+b.$$

La dérivation est donc une application de E dans F.

De plus, pour tout couple (f, g) d'éléments de E et pour tout couple (α, β) de nombres réels,

$$(\alpha f+\beta g)' = \alpha f'+\beta g'.$$

Un cas particulier très important est celui où $F=K$; plus précisément : soit E un espace vectoriel sur K. On appelle *forme linéaire* sur E une application linéaire de E dans K (le corps K étant considéré comme un espace vectoriel sur lui-même).

EXEMPLE. Soient E l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et x_0 un nombre réel. L'application qui à tout élément f de E associe sa valeur au point x_0 est une forme linéaire sur E.

En effet, pour tout couple (f, g) d'éléments de E, et pour tout couple (α, β) de nombres réels,

$$(\alpha f+\beta g)(x_0) = \alpha f(x_0)+\beta g(x_0).$$

5.6 Isomorphismes d'espaces vectoriels. On dit qu'une application linéaire U d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un isomorphisme de E sur F s'il existe une application linéaire V de F dans E telle que

$$V \circ U = I_E \qquad \text{et} \qquad U \circ V = I_F. \tag{1}$$

Un isomorphisme d'un espace vectoriel E sur lui-même s'appelle *automorphisme* de E.

EXEMPLE. Soient E un espace vectoriel sur K et α un scalaire. L'application $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha \boldsymbol{x}$ est un endomorphisme de E, appelé *homothétie de rapport* α. Si α est non nul, c'est un automorphisme de E, dont l'application réciproque est l'homothétie de rapport $1/\alpha$.

En particulier, l'application identique de E est un automorphisme de E.

On peut caractériser très simplement les isomorphismes. En effet, soit U une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Une condition nécessaire et suffisante pour que U soit un isomorphisme de E sur F est que U soit bijective.

Les relations (1) montrent que cette condition est nécessaire. Supposons réciproquement que l'application linéaire U soit bijective, et notons V l'application réciproque de U. Nous devons montrer que l'application V est linéaire. Soient en effet $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de F, α et β deux scalaires. Posons

$$\boldsymbol{s} = V(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{t} = V(\boldsymbol{y}).$$

L'application U étant linéaire,

$$U(\alpha \boldsymbol{s}+\beta \boldsymbol{t}) = \alpha U(\boldsymbol{s})+\beta U(\boldsymbol{t}).$$

D'où

$$\alpha \boldsymbol{s}+\beta \boldsymbol{t} = V[\alpha U(\boldsymbol{s})+\beta U(\boldsymbol{t})],$$

ou encore, par définition de s et de t,

$$\alpha V(x)+\beta V(y) = V(\alpha x+\beta y),$$

ce qu'il fallait prouver.

5.7 Image et noyau d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, et U une application linéaire de E dans F.

1. L'image $U(E')$ d'un sous-espace vectoriel E' de E par U est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, l'image de E par U est un sous-espace vectoriel de F, appelé aussi image de U, et noté $\mathrm{Im}(U)$.

2. L'image réciproque $U^{-1}(F')$ d'un sous-espace vectoriel F' de F est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, l'image réciproque de $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé noyau de U, et noté $\mathrm{Ker}(U)$.

3. Une condition nécessaire et suffisante pour que U soit injective est que son noyau soit réduit au vecteur nul de E.

Vérifions ces trois assertions.

Assertion 1. Soient x et y deux vecteurs de $U(E')$, α et β deux scalaires. Il existe deux vecteurs s et t de E' tels que $x = U(s)$ et $y = U(t)$; nous en déduisons que

$$\alpha x+\beta y = U(\alpha s+\beta t).$$

Comme E' est un sous-espace vectoriel de E, $U(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

Assertion 2. Soient s et t deux vecteurs de $U^{-1}(F')$, α et β deux scalaires. Les vecteurs $x = U(s)$ et $y = U(t)$ appartiennent à F'; donc le vecteur

$$U(\alpha s+\beta t) = \alpha x+\beta y$$

appartient à F', ce qui signifie que $\alpha s+\beta t$ appartient à $U^{-1}(F')$.

Assertion 3. Si l'application U est injective, il est évident que son noyau est réduit à $\{0\}$. Réciproquement, supposons que

$$\mathrm{Ker}(U) = \{0\}.$$

Soient x et y deux vecteurs de E tels que $U(x) = U(y)$. Puisque l'application U est linéaire,

$$U(x-y) = 0.$$

D'après l'hypothèse,

$$x-y = 0;$$

donc $x = y$.

5.8 Espaces vectoriels d'applications linéaires

1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel, noté $\mathscr{L}(E, F)$, de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(E, F)$ de toutes les applications de E dans F.

2. Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur K, U une application linéaire de E dans F, et V une application linéaire de F dans G. Alors l'application composée $V \circ U$ est une application linéaire de E dans G.

Vérifions ces deux assertions.

Assertion 1. Notons d'abord que $\mathscr{L}(E, F)$ n'est pas vide, puisque l'application nulle de E dans F est linéaire. Il suffit donc de vérifier que, pour tout couple (U_1, U_2) d'éléments de $\mathscr{L}(E, F)$ et pour tout couple (λ_1, λ_2) de scalaires, l'application $U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$ est linéaire.

Considérons en effet deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E, et deux scalaires α et β. Par définition des lois de $\mathscr{F}(E, F)$,

$$U(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}) = \lambda_1 U_1(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}) + \lambda_2 U_2(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}).$$

Puisque les applications U_1 et U_2 sont linéaires,

$$U(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}) = \lambda_1[\alpha U_1(\boldsymbol{x}) + \beta U_1(\boldsymbol{y})] + \lambda_2[\alpha U_2(\boldsymbol{x}) + \beta U_2(\boldsymbol{y})].$$

Le corps K étant commutatif, cette expression vaut encore

$$\alpha[\lambda_1 U_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 U_2(\boldsymbol{x})] + \beta[\lambda_1 U_1(\boldsymbol{y}) + \lambda_2 U_2(\boldsymbol{y})],$$

ou, par définition des lois de $\mathscr{F}(E, F)$,

$$\alpha U(\boldsymbol{x}) + \beta U(\boldsymbol{y}),$$

d'où le résultat annoncé.

Assertion 2. Soient encore $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de E, α et β deux scalaires. Par définition de l'application composée des applications U et V,

$$(V \circ U)(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}) = V[U(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y})].$$

L'application U étant linéaire,

$$V[U(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y})] = V[\alpha U(\boldsymbol{x}) + \beta U(\boldsymbol{y})];$$

l'application V étant linéaire,

$$V[\alpha U(\boldsymbol{x}) + \beta U(\boldsymbol{y})] = \alpha V[U(\boldsymbol{x})] + \beta V[U(\boldsymbol{y})].$$

L'application $V \circ U$ est donc linéaire.

EXEMPLES. Lorsque E est réduit à $\{\boldsymbol{0}\}$, alors, pour tout espace vectoriel F,

$$\mathscr{L}(E, F) = \{0\}.$$

De même, lorsque $F = \{\boldsymbol{0}\}$, pour tout espace vectoriel E, l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est réduit à l'application nulle de E dans F.

Il en résulte trois conséquences immédiates :

• Soit E un espace vectoriel sur K. L'ensemble des formes linéaires sur E est un sous-espace vectoriel, appelé dual de E et noté E^*, de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(E, K)$.

• Soit E un espace vectoriel sur K. L'ensemble des endomorphismes de E, muni des deux lois de composition internes :

$$(U, V) \mapsto U+V \qquad \text{et} \qquad (U, V) \mapsto V \circ U,$$

est un anneau unitaire, dont l'élément neutre pour la deuxième loi est l'application identique de E.

(L'application $V \circ U$ se note encore VU.)

Cet anneau unitaire s'appelle anneau des endomorphismes de E, et se note $\mathscr{L}(E)$.

En général, l'anneau unitaire $\mathscr{L}(E)$ n'est ni un anneau commutatif, ni un corps.

• Soit E un espace vectoriel sur K. L'ensemble des automorphismes de E est un sous-groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathbf{GL}(E)$, du groupe des permutations de E; c'est encore le groupe des éléments inversibles de l'anneau unitaire $\mathscr{L}(E)$.

En général, le groupe $\mathbf{GL}(E)$ n'est pas commutatif.

5.9 Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur K.

On appelle *somme* de E' et E'', et on note $E'+E''$, le sous-espace vectoriel de E engendré par $E' \cup E''$.

On dit que la somme de E' et E'' est *directe* si $E' \cap E'' = \{0\}$; on la note alors $E' \oplus E''$.

On peut caractériser très simplement les sommes et sommes directes. En effet :

1. La somme de E' et de E'' n'est autre que l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{x}$ de E pouvant s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'', \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{x}' \in E' \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}'' \in E''. \tag{1}$$

2. Pour que la somme de E' et E'' soit directe, il faut et il suffit que tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de $E'+E''$ puisse s'écrire d'une seule manière sous la forme précédente.

Nous laissons la démonstration de ces deux assertions à titre d'exercice.

Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur K. On dit que E' et E'' sont supplémentaires dans E si E est somme directe de E' et de E'' :

$$E = E' \oplus E'',$$

c'est-à-dire si $E' \cup E''$ engendre E et si $E' \cap E'' = \{0\}$. Cela revient à dire que tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}''$, où $\boldsymbol{x}' \in E'$ et $\boldsymbol{x}'' \in E''$.

Les applications $U' : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ et $U'' : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}''$ s'appellent respectivement projecteur sur E' parallèlement à E'' et projecteur sur E'' parallèlement à E'. Les vecteurs $\boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{x}''$ s'appellent respectivement projection de $\boldsymbol{x}$ sur E' parallèlement à E'' et projection de x sur E'' parallèlement à E'. Elles possèdent un certain nombre de propriétés simples :

1. Les applications U' et U'' sont des endomorphismes de E.
2. L'endomorphisme U' a pour image E' et pour noyau E''.
3. Les endomorphismes U' et U'' satisfont aux relations

$$U'U'' = U''U' = 0 \tag{2}$$

$$U'^2 = U' \quad \text{et} \quad U''^2 = U'' \tag{3}$$

$$U' + U'' = I_E. \tag{4}$$

Démontrons ces trois assertions :

Assertion 1. Soient x et y deux vecteurs de E, décomposés respectivement en $x'+x''$ et $y'+y''$, où $x', y' \in E'$ et $x'', y'' \in E''$, α et β deux scalaires. Alors

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x' + \beta y') + (\alpha x'' + \beta y'').$$

La décomposition de $\alpha x + \beta y$ sous la forme (1) étant unique,

$$U'(\alpha x + \beta y) = \alpha x' + \beta y' = \alpha U'(x) + \beta U'(y),$$

ce qui montre que l'application U' est linéaire.

Assertion 2. Il est évident que $\mathrm{Im}(U')$ est contenu dans E'. Comme, pour tout vecteur x de E', $U'(x) = x$, nous voyons que $\mathrm{Im}(U') = E'$. D'autre part, le noyau de U' est constitué des vecteurs x de E tels que $U'(x) = 0$, c'est-à-dire tels que x appartienne à E''.

Assertion 3. Pour tout vecteur x de E, $(U''U')(x) = U''(x') = 0$; donc $U''U' = 0$. De même, $U'U'' = 0$.

Pour tout vecteur x de E, $U'(x) = x' \in E'$. Puisque, pour tout vecteur x' de E' $U'(x') = x'$, nous voyons que $U'^2(x) = U'(x)$. D'où les formules (3).

Enfin, la formule (4) découle de la définition des applications U' et U''.

Réciproquement, soient U' et U'' deux endomorphismes de E satisfaisant aux relations (2) à (4). Nous allons montrer que U' est le projecteur sur $\mathrm{Im}(U')$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(U')$. Remarquons d'abord que les relations (4) et $U'^2 = U'$ impliquent les relations (2) et $U''^2 = U''$.

En effet, $U'U'' = U'(I_E - U') = U' - U'^2 = 0$; de même, $U''U' = 0$. Enfin,

$$U''^2 = (I_E - U')^2 = I_E - 2U' + U'^2 = I_E - U' = U''.$$

Nous sommes donc ramenés à prouver que, pour tout endomorphisme U de E tel que $U^2 = U$, l'image et le noyau de U sont supplémentaires dans E et que U est le projecteur sur $\mathrm{Im}(U)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(U)$.

En effet, supposons que tout vecteur x de E puisse s'écrire sous la forme

$$x = x' + x'',$$

où $\boldsymbol{x}' \in \operatorname{Im}(U)$ et $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Ker}(U)$. Alors $U(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x}')$. Comme $\boldsymbol{x}'$ appartient à $\operatorname{Im}(U)$, il existe un vecteur $\boldsymbol{y}$ de E tel que $U(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}'$. Puisque $U^2 = U$,

$$U(\boldsymbol{x}') = U^2(\boldsymbol{y}) = U(\boldsymbol{y}) .$$

Donc $\boldsymbol{x}' = U(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} - U(\boldsymbol{x})$; la décomposition de $\boldsymbol{x}$ est unique. Réciproquement, il est immédiat que $U(\boldsymbol{x})$ appartient à $\operatorname{Im}(U)$ et $\boldsymbol{x} - U(\boldsymbol{x})$ à $\operatorname{Ker}(U)$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(U)$ et $\operatorname{Ker}(U)$ sont supplémentaires dans E, et U est l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$, ce qu'il fallait prouver.

ALGÈBRES

5.10 Applications bilinéaires. Algèbres. Soient E et F des espaces vectoriels sur K. On dit qu'une application f de E^2 dans F est *bilinéaire* si, pour tout vecteur $\boldsymbol{y}$ de E, l'application $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est linéaire et si, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, l'application $\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est linéaire.

Lorsque $F = K$, on dit que f est une *forme bilinéaire* sur E. Ce cas sera étudié au chapitre 8. Nous examinons maintenant seulement le cas où $F = E$. Dans ces conditions, f est une application de $E \times E$ dans E; autrement dit, c'est une loi de composition interne sur E. Cette loi s'appelle souvent multiplication; l'élément $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ s'appelle produit de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$, et se note tout simplement $\boldsymbol{xy}$.

Un espace vectoriel E sur K muni d'une application bilinéaire de $E \times E$ dans E est appelé *algèbre* (sur K). Ainsi, l'ensemble E est muni de deux lois de composition internes, notées additivement et multiplicativement, et d'une loi de composition externe, ces lois satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Muni de la première et de la troisième loi, E est un espace vectoriel;

b) Pour tout triplet $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ d'éléments de E,

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{xy}+\boldsymbol{xz} \qquad (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{yx}+\boldsymbol{zx} ;$$

c) Pour tout couple (α, β) d'éléments de K et pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ d'éléments de E,

$$(\alpha \boldsymbol{x})\, (\beta \boldsymbol{y}) = (\alpha\beta)\, (\boldsymbol{xy}) .$$

On dit que l'algèbre E est *associative* si la multiplication l'est. Muni des deux de composition internes, E est alors un anneau. On dit que l'algèbre est *unitaire* si la multiplication admet un élément unité. Enfin, on dit que l'algèbre est *commutative* si la multiplication l'est.

La plupart des espaces vectoriels que nous rencontrerons sont munis d'une structure d'algèbre. C'est déjà le cas pour $\mathscr{L}(E)$, muni de la loi de composition des applications. L'algèbre $\mathscr{L}(E)$ est associative et unitaire; l'élément unité est l'application identique I_E.

Soit A un ensemble non vide. On munit l'ensemble $F(A, K)$ des applications de A dans K des trois lois suivantes :

$$(f+g)\,(x) = f(x)+g(x)$$
$$(fg)\,(x) = f(x)\, g(x)$$
$$(\alpha f)\,(x) = \alpha f(x) .$$

Alors $F(A, K)$ est une algèbre sur K, appelée algèbre des applications de A dans K. Dans le tome 2, nous étudierons le cas où A est une partie de $\mathbf{R}$ et où $K = \mathbf{R}$; nous obtiendrons l'algèbre des fonctions numériques définies sur A. Dans le tome 4, nous remplacerons A par une partie de $\mathbf{R}^2$, pour passer à l'algèbre des fonctions numériques de deux variables réelles. Lorsque $A = \mathbf{N}$, nous obtenons tout simplement l'algèbre des suites d'éléments de K. En prenant $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, nous voyons que les suites de nombres réels ou de nombres complexes constituent une algèbre.

Citons encore l'algèbre des matrices carrées d'ordre n (chapitre 7) et l'algèbre des polynômes (chapitre 9).

5.11 Sous-algèbres. Les définitions des sous-groupes, sous-anneaux, sous-corps et sous-espaces vectoriels conduisent naturellement à celle des sous-algèbres :

On dit qu'une partie E' d'une algèbre E sur K est une *sous-algèbre* de E si E' est stable pour les trois lois de E et si, munie des lois induites, E' est une algèbre sur K. Si l'algèbre E est unitaire, les sous-algèbres de E contenant l'élément unité de E sont appelées *sous-algèbres unitaires* de E.

Pour qu'une partie E' de E soit une sous-algèbre de E, il faut et il suffit que E' soit un sous-espace vectoriel de E stable pour la multiplication.

Par exemple, les homothéties d'un espace vectoriel E constituent une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire $\mathscr{L}(E)$.

5.12 Morphismes d'algèbres. Soient E et F deux algèbres sur K. On dit qu'une application U de E dans F est un morphisme d'algèbres si c'est un morphisme pour les trois lois. En particulier, l'application U doit être linéaire. Si les algèbres E et F sont associatives, U doit être un morphisme d'anneaux.

Supposons enfin que les algèbres E et F sont unitaires. Comme dans le cas des anneaux, on entend par *morphisme d'algèbres unitaires* un morphisme d'algèbres transformant l'élément unité de E en celui de F.

Nous n'insistons par pour le moment sur ces notions qui peuvent sembler abstraites au premier abord. Le lecteur verra des exemples tout le long de ces ouvrages, et comprendra qu'il aurait été absurde de passer sous silence la structure la plus répandue!

EXERCICES

Sous-espaces vectoriels

Déterminer parmi les ensembles de vecteurs (x_1, x_2, x_3) de $\mathbf{R}^3$ définis par les conditions suivantes ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

5.1 $x_1+x_2+x_3=0.$

5.2 $4x_1-2x_2+x_3=0.$

5.3 $3x_1+x_2+x_3=1.$

5.4 $x_1-4x_2+x_3=0$ et $4x_1+x_2-x_3=0.$

5.5 $2x_1-3x_2-x_3=0$ et $4x_1-6x_2-2x_3=0.$

5.6 $x_1-x_2+x_3=0$ ou $x_1+x_2-x_3=0.$

5.7 Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, tels que $F\cap G=F\cap H$, $F+G=F+H$ et que $G\subset H$. Montrer que $G=H$.

5.8 Soient E un espace vectoriel et (F, G) un couple de sous-espaces vectoriels de E distincts de E. Montrer que $F\cup G$ est distinct de E.

Applications linéaires

5.9 Soit U l'application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^5$ qui à tout vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) associe le vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$. Montrer que U est linéaire; déterminer son noyau et son image.

5.10 Soit E' un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Montrer que l'injection canonique de E' dans E est linéaire; déterminer son noyau et son image.

Montrer que les applications suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ sont linéaires; déterminer leurs noyaux et leurs images.

5.11 $U(x_1, x_2)=(4x_1-3x_2,\ 5x_1+4x_2).$

5.12 $U(x_1, x_2)=(6x_1-4y_2,\ 9x_1-6x_2).$

Mêmes questions pour les applications de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définies ci-dessous :

5.13 $U(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2+x_3,\ x_2,\ x_3).$

5.14 $U(x_1, x_2, x_3)=(x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1).$

5.15 Soient U et V les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définies par

$U(x_1, x_2)=(4x_1-x_2,\ x_1-x_2)$ $\quad V(x_1, x_2)=(x_1+x_2,\ 2x_1-x_2).$

Montrer que U et V sont linéaires. Déterminer les applications $V\circ U$ et $U\circ V$, et vérifier qu'elles sont linéaires.

Montrer que les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définies ci-dessous sont des automorphismes de $\mathbf{R}^2$:

5.16 $U(x_1, x_2)=(x_1+x_2,\ x_1).$

5.17 $U(x_1, x_2)=(5x_1-4x_2,\ 6x_1+5x_2).$

5.18 Soient E un espace vectoriel sur K et U un endomorphisme de E. Montrer que si, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $U(\boldsymbol{x})$ sont colinéaires, U est une homothétie.

5.19 Soient E un espace vectoriel et U un endomorphisme de E tel que $U^2 = 0$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(U) \subset \mathrm{Ker}(U)$.

b) Montrer que $I_E + U$ est un automorphisme de E.

Soit U un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

5.20 Montrer que si $\mathrm{Ker}(U) \cap \mathrm{Im}(U) = \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}(U^2) = \mathrm{Ker}(U)$.

5.21 Montrer la réciproque.

5.22 Montrer que si $E = \mathrm{Ker}(U) + \mathrm{Im}(U)$, alors $\mathrm{Im}(U^2) = \mathrm{Im}(U)$.

5.23 Montrer la réciproque.

5.24 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et U un endomorphisme de E tel que $U^2 = I_E$.

a) Montrer que les applications U_1 et U_2 de E dans lui-même, définies par

$$U_1(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{x} + U(\boldsymbol{x})] \qquad U_2(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{x} - U(\boldsymbol{x})]$$

sont des endomorphismes de E.

b) Soient E_1 et E_2 les images de U_1 et U_2. Montrer que, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}_1$ de E_1, $U(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_1$ et que, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}_2$ de E_2, $U(\boldsymbol{x}_2) = -\boldsymbol{x}_2$. En déduire que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

c) Montrer que U_1 est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et que U_2 est le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

CHAPITRE 6

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

6.1 Bases. Posons d'abord quelques définitions :

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur K.

On dit que cette famille est *génératrice* si le sous-espace vectoriel de E qu'elle engendre est égal à E tout entier.

On dit que cette famille est *libre* si la relation linéaire triviale est la seule relation linéaire entre les vecteurs x_i. Dans le cas contraire, on dit que cette famille est *liée*.

On dit enfin que cette famille est une *base* de E si elle est libre et génératrice.

Lorsque la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, on dit encore que les vecteurs x_i sont *linéairement indépendants*; sinon, on dit qu'ils sont *linéairement dépendants*. Deux vecteurs linéairements dépendants sont dits *colinéaires*; trois vecteurs linéairement dépendants sont dits *coplanaires*.

EXEMPLES.

1. Pour qu'une famille réduite à un seul vecteur x soit libre, il faut et il suffit que x soit non nul.

2. Une famille contenant le vecteur nul, ou deux fois le même vecteur, n'est pas libre.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, la famille constituée des vecteurs $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (1, -1)$ et $x_3 = (0, 1)$ est génératrice.

En effet, tout vecteur $x = (u_1, u_2)$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \frac{u_1}{2} x_1 + \frac{u_1}{2} x_2 + u_2 x_3,$$

ou encore sous la forme

$$x = u_1 x_2 + (u_1 + u_2) x_3.$$

Les bases ont une propriété très importante que voici :

On suppose que $B = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E. Alors, pour tout vecteur x de E, il existe une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels à support fini et une seule telle que

$$x = \sum_{i\in I} u_i e_i ;$$

on l'appelle famille des composantes du vecteur x dans la base B.

L'existence d'une telle famille découle du fait que B est génératrice. Supposons maintenant que x puisse s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} v_i e_i .$$

Alors

$$\sum_{i \in I} (u_i - v_i)\, e_i = 0\,.$$

Or, puisque B est libre, tout relation linéaire entre les vecteurs e_i est triviale. Ainsi, pour tout élément i de I, $u_i - v_i = 0$, soit $u_i = v_i$.

Réciproquement, si tout vecteur x de E peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs e_i, la famille B est une base de E.

L'existence d'une décomposition de tout vecteur de E sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs e_i montre que B est génératrice. L'unicité de la décomposition du vecteur nul montre que B est libre.

EXEMPLE. Dans l'espace vectoriel K^n, la famille constituée des n vecteurs $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ est une base, dite canonique. De plus, pour tout vecteur $x = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de K^n, la famille des composantes de x dans la base canonique n'est autre que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
En particulier, la base canonique de $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ est constituée de 1 et de j.

6.2 Espaces vectoriels de dimension finie. On dit qu'un espace vectoriel E sur K est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie d'éléments de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base. En effet, on a le théorème suivant :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur K et $S = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille génératrice finie de vecteurs de E. Il existe alors une base de E extraite de S.

Écartons le cas où l'espace vectoriel E est réduit au vecteur nul. L'ensemble des cardinaux des familles libres extraites de S est une partie non vide de $\mathbf{N}$ majorée par p, admettant donc un plus grand élément n. Soit $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ une famille libre extraite de S à n éléments. Supposons par l'absurde que B ne soit pas génératrice. Il existe alors un vecteur x_i de S qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de B. (Sinon, puisque S est génératrice, B le serait aussi.) La famille B' obtenue par adjonction de x_i à B est encore libre. En effet, soit

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j + \beta x_i = 0$$

une relation linéaire entre les éléments de B'. Puisque x_i n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de B, $\beta = 0$. Il s'ensuit que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j = 0\,.$$

La famille B étant libre, tous les scalaires α_j sont nuls. Nous aboutissons à une contradiction, car B' est une famille libre extraite de S ayant strictement plus de n éléments.

En fait, tout espace vectoriel admet une base, mais la démonstration dans le cas général n'est pas élémentaire.

Le théorème suivant est très important, et connu sous le nom de « théorème de la base incomplète ».

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur K, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base finie de E et $L = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une famille libre finie de vecteurs de E. Alors $p \leqslant n$ et l'on peut compléter L en une base B' de E par adjonction à L de $n-p$ éléments de B.

Nous admettrons ce théorème.

On peut maintenant définir la dimension d'un espace vectoriel. En effet, soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Alors toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre de vecteurs.

Le cardinal commun à toutes les bases de E s'appelle dimension de E et se note dim E.

Soient en effet B et C deux bases de E. Puisque toutes les familles libres de vecteurs de E sont finies, il en est ainsi de B et de C. Le théorème montre alors que Card $(C) \leqslant$ Card (B). De même, Card $(B) \leqslant$ Card(C). L'antisymétrie de la relation d'ordre naturel dans $\mathbf{N}$ entraîne l'assertion.

Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé *droite*.

Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé *plan*.

Pour éviter des cas d'exception, on est amené à dire qu'un espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.

EXEMPLES.

L'espace vectoriel $\mathbf{R}$ est une droite, souvent appelée droite numérique.

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est un plan.

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3.

Plus généralement, l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est de dimension n.

Il résulte encore du théorème ci-dessus que, dans un espace vectoriel F de dimension n sur K, toute famille génératrice finie S de vecteurs de E a au moins n éléments, et il existe une base B de E constituée de n vecteurs de S.

Ceci entraîne donc que, dans un espace vectoriel E de dimension n sur K, toute famille libre de n vecteurs de E est une base, et toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base.

6.3 Caractérisation des espaces vectoriels de dimension inférieure à n. Soient E un espace vectoriel sur K et n un entier naturel. Pour que E soit de dimension finie inférieure à n, il faut et il suffit que toute famille libre de vecteurs de E ait au plus n éléments.

Nous savons déjà que cette condition est nécessaire. Réciproquement, soient m le plus grand des entiers naturels p tels qu'il existe une famille libre de p vecteurs de

E et L une famille libre de m vecteurs de E. Alors tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de L, ce qui montre que L est une base de E. Ainsi, $\dim E \leqslant m$.

EXEMPLES.

1. *Montrer que les vecteurs*

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, -1), \qquad \boldsymbol{x}_2 = (-2, 1, 1), \qquad \boldsymbol{x}_3 = (1, -1, 2)$$

forment une base de $\mathbf{R}^3$.

Il suffit pour cela de montrer que les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ sont linéairement indépendants. Soient donc α_1, α_2, α_3 trois nombres réels tels que

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0};$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ajoutons les deux premières relations membre à membre :

$$3\alpha_1 - \alpha_2 = 0;$$

d'où $\quad \alpha_2 = 3\alpha_1,$

et, en reportant dans la deuxième relation :

$$\alpha_3 = 5\alpha_1.$$

Substituons les valeurs obtenues dans la troisième relation :

$$-\alpha_1 + 3\alpha_1 + 10\alpha_1 = 0,$$

soit : $\quad 12\alpha_1 = 0,$

et finalement

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

ce qu'il fallait prouver.

2. *Trouver une base du sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^3$ *engendré par les vecteurs*

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, 3), \qquad \boldsymbol{x}_2 = (2, -1, 1), \qquad \boldsymbol{x}_3 = (1, 0, 1) \text{ et } \boldsymbol{x}_4 = (0, 1, 1).$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ sont linéairement indépendants, puisque leurs composantes ne sont pas proportionnelles. Le vecteur $\boldsymbol{x}_3$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{5}(\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2),$$

et le vecteur $\boldsymbol{x}_4$ sous la forme

$$\boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{5}(2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2).$$

Les vecteurs x_1 et x_2 constituent donc une base du sous-espace vectoriel E' engendré par les vecteurs x_1, x_2, x_3 et x_4.

De plus, il est immédiat que deux quelconques des vecteurs x_1, x_2, x_3 et x_4 sont linéairement indépendants. Nous obtenons ainsi les autres bases du sous-espace vectoriel E' constituées de vecteurs pris parmi les vecteurs donnés :

$$(x_1, x_3) . (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4)$$

et aussi (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_4, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_2), (x_4, x_3).

Il existe bien entendu des bases de E' qui ne sont pas obtenues par ce procédé, telles que par exemple (x_1+x_2, x_1-2x_2).

6.4 Détermination d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, l'espace vectoriel E étant de dimension finie p et muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Pour toute suite $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ de p vecteurs de F, il existe une application linéaire U de E dans F et une seule telle que, pour tout élément j de $[1, p]$, $U(e_j) = y_j$.

En particulier, deux applications linéaires prenant même valeur sur les éléments d'une base sont égales.

Unicité. Tout vecteur x de E peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j .$$

Supposons qu'il existe une application linéaire U répondant à la question. Nécessairement,

$$U(x) = \sum_{j=1}^{p} u_j\, U(e_j) = \sum_{j=1} u_j y_j , \tag{1}$$

ce qui détermine U.

Existence. L'unique application U de E dans F définie par la formule (1) convient visiblement.

6.5 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K. Alors tout sous-espace vectoriel E' de E est de dimension finie, et

$$\dim E' \leqslant \dim E .$$

En effet, toute famille libre de vecteurs de E' est une famille libre de vecteurs de E. Or, d'après le n° 6.2, toute famille libre de vecteurs de E a au plus n éléments; l'assertion résulte alors du n° 6.3.

Le théorème suivant montre l'existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et E' un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

1. Tous les sous-espaces vectoriels supplémentaires de E' dans E ont pour dimension $n-p$.

2. Il existe un sous-espace vectoriel supplémentaire de E' dans E.

Assertion 1. Soient E'' un supplémentaire de E' dans E, $B' = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E' et $B'' = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une base de E''. Puisque tout vecteur x de E peut se décomposer en la somme d'un vecteur de E' et d'un vecteur de E'', la famille $B = (e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q)$ est génératrice. Soit

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j f_j = 0$$

une relation linéaire entre les vecteurs de B. Le vecteur $x' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ appartient à E' et le vecteur $x'' = \sum_{j=1}^{q} \beta_j f_j$ appartient à E''. L'unicité de la décomposition du vecteur nul sous la forme $x' + x''$ montre que $x' = x'' = 0$. Les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ étant linéairement indépendants, les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont nuls; il en est de même de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Ainsi, la famille B est libre, et

$$\dim E'' = q = n-p.$$

Assertion 2. Soit $B' = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E'. Puisque B' est une famille libre de vecteurs de E, on peut compléter B' en une base

$$B = (e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_{n-p})$$

de E. Montrons que le sous-espace vectoriel E'' de E engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_{n-p}$ est un supplémentaire de E' dans E.

Puisque la famille B est génératrice, tout vecteur x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j f_j,$$

c'est-à-dire sous la forme $x = x' + x''$, où le vecteur $x' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ appartient à E' et le vecteur $x'' = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j f_j$ à E''.

Enfin, soit $x = y' + y''$ une deuxième décomposition de x, où $y' \in E'$ et $y'' \in E''$. Alors $x' - y' = y'' - x''$; le premier membre appartient à E' et le second à E''. Décomposons $x' - y'$ et $x'' - y''$ dans les bases B' et $B'' = (f_1, f_2, \ldots, f_{n-p})$:

$$x' - y' = \sum_{i=1}^{p} u_i e_i \quad \text{et} \quad x'' - y'' = \sum_{j=1}^{n-p} v_j f_j.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{p} u_i \boldsymbol{e}_i + \sum_{j=1}^{n-p} v_j \boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{0}.$$

Nous obtenons ainsi une relation linéaire entre les vecteurs de la famille libre B. Cette relation linéaire étant triviale, $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{0}$, ce qui montre l'unicité de la décomposition du vecteur $\boldsymbol{x}$.

Il en résulte que, étant donné un espace vectoriel E de dimension finie sur K et E' un sous-espace vectoriel de E, pour que $E' = E$, il faut et il suffit que $\dim E' = \dim E$.

6.6 Rang d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et U une application linéaire de E dans F. On dit que U est de rang fini si l'image de U est de dimension finie. Cette dimension est alors appelée *rang* de U, et notée rang (U).

Dans ces conditions, si E est de dimension finie, toute application linéaire U de E dans F est de rang fini, et

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(U) + \operatorname{rang}(U).$$

Soient en effet E' un sous-espace vectoriel supplémentaire du noyau de U dans E et U' la restriction de U à E'. Alors

$$\operatorname{Ker}(U') = \operatorname{Ker}(U) \cap E' = \{\boldsymbol{0}\},$$

ce qui montre que U' est injective. Il s'ensuit que U' définit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im}(U)$. Donc $\operatorname{Im}(U)$ est de dimension finie égale à celle de E'. La formule annoncée découle alors de la suivante :

$$\dim E' + \dim \operatorname{Ker}(U) = \dim E.$$

6.7 Noyaux des formes linéaires. Soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{R}^2$. Alors le noyau de f est une droite.

Soit de même f une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{R}^3$. Alors le noyau de f est un plan.

En effet, l'image de toute forme linéaire non nulle est $\mathbf{R}$. Sa dimension est donc 1.

Nous pouvons nous demander réciproquement si toute droite de $\mathbf{R}^2$, ou tout plan de $\mathbf{R}^3$, peut être considéré comme le noyau d'une forme linéaire. La réponse est affirmative : étant donnée une droite D de $\mathbf{R}^2$, il existe une forme linéaire sur $\mathbf{R}^2$ dont le noyau est D; de plus, deux telles formes linéaires sont proportionnelles.

Soit f une forme linéaire sur $\mathbf{R}^2$ dont le noyau est D. L'équation

$$f(\boldsymbol{x}) = 0,$$

qui a pour ensemble de solutions la droite D, s'appelle équation de la droite D.

Soit de même P un plan de $\mathbf{R}^3$. Il existe une forme linéaire sur $\mathbf{R}^3$ dont le noyau est P; deux telles formes linéaires sont proportionnelles.

Soit f une forme linéaire sur $\mathbf{R}^3$ dont le noyau est P. L'équation

$$f(\boldsymbol{x}) = 0,$$

dont l'ensemble des solutions est P, s'appelle équation du plan P.

Soit en effet $\boldsymbol{e}_1$ un vecteur non nul de D. Choisissons un vecteur $\boldsymbol{e}_2$ de $\mathbf{R}^2$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$. D'après le nº 6.4, il existe une forme linéaire f_0 sur $\mathbf{R}^2$ et une seule telle que

$$f_0(\boldsymbol{e}_1) = 0, \qquad f_0(\boldsymbol{e}_2) = 1.$$

Il est clair que f_0 convient.

Soit maintenant f une forme linéaire sur $\mathbf{R}^2$ dont le noyau est D. Posons

$$\alpha = f(\boldsymbol{e}_2).$$

La forme linéaire $f - \alpha f_0$, s'annulant sur $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$, est nulle. Donc

$$f = \alpha f_0.$$

Le cas des plans de $\mathbf{R}^3$ se traite de même.

6.8 Récurrences linéaires. Nous avons déjà rencontré au chapitre 1 les suites satisfaisant à la relation de récurrence

$$u_n = r u_{n-1}$$

(suites géométriques de raison r). Le terme général est donné en fonction de n et du premier terme u_0 par la formule $u_n = r^n u_0$.

Nous nous proposons plus généralement de trouver les suites satisfaisant à la relation de récurrence

$$u_n = p u_{n-1} + q u_{n-2},$$

où p et q sont deux nombres complexes donnés. Nous écarterons le cas déjà étudié où $q = 0$.

Le théorème utile pour cette recherche est le suivant :

L'ensemble des suites (u_n) de nombres complexes satisfaisant à la relation de récurrence

$$u_n = p u_{n-1} + q u_{n-2} \tag{1}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, de dimension 2.

Nous savons déjà que les suites de nombres complexes constituent un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. (C'est le cas particulier de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(A, F)$ des applications d'un ensemble A dans un espace vectoriel F sur $\mathbf{C}$, lorsque $A = \mathbf{N}$ et que $F = \mathbf{C}$.) Montrons que les solutions de l'équation (1) constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{C})$.

En effet, l'ensemble E des solutions de (1) est non vide, puisqu'il contient la suite nulle. De plus, soient (u_n) et (v_n) deux solutions de l'équation (1), α et β deux nombres complexes; alors, pour tout entier naturel n supérieur à 2,

$$\begin{aligned}\alpha u_n+\beta v_n &= \alpha(pu_{n-1}+qu_{n-2})+\beta(pv_{n-1}+qv_{n-2})\\ &= p(\alpha u_{n-1}+\beta v_{n-1})+q(\alpha u_{n-2}+\beta v_{n-2}),\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite de terme général $\alpha u_n+\beta v_n$ est encore une solution de l'équation (1).

D'autre part, il est immédiat que la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit par récurrence une suite (u_n) et une seule satisfaisant à la relation (1). Considérons alors l'application U de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^2$ dans l'espace vectoriel E qui au couple (u_0, u_1) associe cette suite (u_n).

L'application U est linéaire. Soient en effet α et β deux nombres complexes, (u_0, u_1) et (v_0, v_1) deux éléments de $\mathbf{C}^2$, (u_n) et (v_n) leurs images par U. Alors la suite de terme général

$$w_n = \alpha u_n+\beta v_n$$

a pour premiers termes

$$w_0 = \alpha u_0+\beta v_0, \qquad w_1 = \alpha u_1+\beta v_1.$$

L'application U est surjective. En effet, tout suite (u_n) peut être considérée comme l'image par U de ses valeurs initiales u_0 et u_1.

L'application U est injective. Son noyau, image réciproque de la suite nulle, est réduit au vecteur nul de $\mathbf{C}^2$, puisque la relation $u_n=0$ pour tout entier naturel n implique évidemment $u_0=0$ et $u_1=0$.

L'application linéaire U, étant bijective, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il résulte alors du n° 6.6 que

$$\dim E = \dim \mathbf{C}^2 = 2,$$

ce qui achève la démonstration.

Pour expliciter toutes les solutions de l'équation (1), il convient donc de connaître deux solutions linéairement indépendantes. Par analogie avec le cas des suites géométriques, cherchons des solutions de la forme

$$u_n = r^n,$$

où r est un nombre complexe non nul. Alors

$$r^n = pr^{n-1}+qr^{n-2}.$$

Le nombre complexe r est donc racine de l'équation, dite caractéristique,

$$x^2-px-q = 0.$$

Distinguons deux cas :

1. *Le discriminant p^2+4q est non nul.* L'équation caractéristique admet donc deux racines distinctes r_1 et r_2. Nous obtenons ainsi deux solutions

$$u'_n = r_1^n \quad \text{et} \quad u''_n = r_2^n.$$

Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes : soient en effet α et β deux nombres complexes tels que, pour tout entier naturel n,

$$\alpha u'_n + \beta u''_n = 0.$$

Alors $\quad \alpha u'_0 + \beta u''_0 = 0,$

soit $\quad \alpha + \beta = 0;$

de plus, $\quad \alpha u'_1 + \beta u''_1 = 0,$

soit $\quad \alpha r_1 + \beta r_2 = 0,$

ou encore $\alpha(r_1 - r_2) = 0.$

Comme les racines de l'équation caractéristique sont distinctes, nous voyons que $\alpha = \beta = 0$, ce qu'il fallait prouver.

La solution générale s'écrit donc dans ce cas

$$u_n = \alpha u'_n + \beta u''_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

2. *Le discriminant* $p^2 + 4q$ *est nul.* L'équation caractéristique admet alors une racine double, à savoir

$$r = p/2.$$

Cherchons alors une solution de la forme

$$u''_n = r^n v_n.$$

Il vient

$$r^n v_n = pr^{n-1} v_{n-1} + qr^{n-2} v_{n-2},$$

soit

$$r^2 v_n - prv_{n-1} - qv_{n-2} = 0,$$

ou encore, en remplaçant r par $p/2$ et q par $-p^2/4$,

$$\frac{p^2}{4} v_n - \frac{p^2}{2} v_{n-1} + \frac{p^2}{4} v_{n-2} = 0.$$

Puisque q est non nul, il en est de même de p, et

$$v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2} = 0.$$

Finalement,

$$v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Nous voyons par récurrence que la différence $v_n - v_{n-1}$ est indépendante de n. Prenons par exemple

$$v_n - v_{n-1} = 1, \qquad \text{et} \qquad v_0 = 0.$$

Alors $u''_n = nr^n$ est encore solution de l'équation (1). Il reste à vérifier que les suites

(r^n) et (nr^n) sont linéairement indépendantes. Considérons donc deux nombres complexes α et β tels que, pour tout entier naturel n,

$$\alpha r^n + \beta n r^n = 0.$$

En particulier,

$$\alpha + \beta \,.\, 0 = 0,$$

donc $\alpha = 0$.

Prenons maintenant n égal à 1; nous voyons aussitôt que $\beta = 0$, ce qu'il fallait prouver.

La solution générale s'écrit donc dans ce cas

$$u_n = \alpha u'_n + \beta u''_n = r^n(\alpha + \beta n).$$

EXEMPLES.

1. *Déterminer la suite* (u_n) *telle que*

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2},$$

et que $u_0 = u_1 = 1$.

L'équation caractéristique est

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$

ses racines sont 2 et 3. La solution générale est donc $2^n\alpha + 3^n\beta$.

Les conditions initiales se traduisent ici par

$$\alpha + \beta = 1,$$
$$2\alpha + 3\beta = 1;$$

d'où $\alpha = 2$, $\beta = -1$, et

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

2. *Déterminer la suite* (u_n) *telle que*

$$u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$$

et que $u_0 = u_1 = 1$.

L'équation caractéristique est

$$x^2 - 4x + 4 = 0;$$

elle admet une racine double, à savoir 2. La solution générale est donc

$$2^n(\alpha + n\beta).$$

Les conditions initiales donnent $\alpha = 1$, et $\beta = -1/2$. Finalement,

$$u_n = 2^n(1 - n/2).$$

3. *Déterminer la suite* (u_n) *telle que*

$$u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2},$$

et que $u_0 = 1, \qquad u_1 = 2.$

L'équation caractéristique est ici

$$x^2 + 2x + 4 = 0;$$

ses racines sont

$$r_1 = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}, \qquad r_2 = -1 - \mathrm{j}\sqrt{3}.$$

Ecrivons r_1 et r_2 sous forme trigonométrique :

$$r_1 = 2\omega = 2(\cos 2\pi/3 + \mathrm{j}\sin 2\pi/3),$$
$$r_2 = 2\omega^2 = 2(\cos 2\pi/3 - \mathrm{j}\sin 2\pi/3).$$

Posons

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n;$$

le second membre se calcule immédiatement à partir de la formule de Moivre, puisque

$$r_1^n = 2^n(\cos 2n\pi/3 + \mathrm{j}\sin 2n\pi/3),$$
$$r_2^n = 2^n(\cos 2n\pi/3 - \mathrm{j}\sin 2n\pi/3).$$

Les valeurs initiales conduisent à

$$\lambda + \mu = 1,$$
$$2\lambda\left(\frac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\right) + 2\mu\left(\frac{-1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\right) = 2.$$

La deuxième équation s'écrit encore

$$-(\lambda+\mu) + (\lambda-\mu)\,\mathrm{j}\sqrt{3} = 2;$$

d'où $\lambda = \dfrac{1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}, \qquad \mu = \dfrac{1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2},$

et enfin

$$u_n = 2^n(\cos 2n\pi/3 + \sqrt{3}\sin 2n\pi/3).$$

Comme $1/2 = \cos \pi/3$ et $\sqrt{3}/2 = \sin \pi/3$, nous pouvons encore écrire

$$u_n = 2^{n+1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{3}.$$

EXERCICES

Bases

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, les vecteurs suivants constituent-ils une base?

6.1 $\boldsymbol{x}_1 = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (1, 2, 3)$.

6.2 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 0)$.

6.3 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (3, 1, 2)$.

6.4 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 1)$.

6.5 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (-1, 1, 1)$.

Dans l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle [0, 1] de $\mathbf{R}$, les fonctions suivantes sont-elles linéairement indépendantes?

6.6 $f : x \mapsto 1$ $g : x \mapsto \sqrt{x}$ $h : x \mapsto x^2$.

6.7 $f : x \mapsto 1$ $g : x \mapsto |x-1/2|$ $h : x \mapsto x^2$.

6.8 $f : x \mapsto 1$ $g : x \mapsto x$ $h : x \mapsto \sin x$.

6.9 Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 2, 0, 1)$ et le sous-espace vectoriel G engendré par les vecteurs $\boldsymbol{g}_1 = (1, 2, -1, 2)$, $\boldsymbol{g}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{g}_3 = (1, 3, -2, 3)$, $\boldsymbol{g}_4 = (0, 1, 0, 1)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Applications linéaires

6.10 Soit K un corps commutatif. On considère les espaces vectoriels K^4 et K^6 munis de leurs bases canoniques, et l'application linéaire U de K^4 dans K^6 qui associe au vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) le vecteur $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_2 - x_1 \\
y_2 &= x_3 - x_1 \\
y_3 &= x_4 - x_1 \\
y_4 &= x_3 - x_2 \\
y_5 &= x_4 - x_2 \\
y_6 &= x_4 - x_3 .
\end{aligned}$$

Déterminer le rang de U.

6.11 Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur K, et U un endomorphisme de E. Montrer que pour que l'image et le noyau de U coïncident, il faut et il suffit que $U^2 = 0$, $n = 2p$ et rang $(U) = p$.

6.12 Soit U un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Ker}(U^2) = \mathrm{Ker}(U)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(U^2) = \mathrm{Im}(U)$.

Récurrences linéaires

Trouver les suites (u_n) de nombres réels telles que

6.13 $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$, $\quad u_0 = 0,\ u_1 = 1.$

6.14 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $\quad u_0 = 4,\ u_1 = 7.$

6.15 $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$, $\quad u_0 = 2,\ u_1 = 5.$

6.16 $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$, $\quad u_0 = 1,\ u_1 = 6.$

6.17 $u_n = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{u_{n-2}}}$, $\quad u_0 = 1,\ u_1 = 2.$

6.18 Trouver la suite (u_n) de nombres réels telle que

$$u_n = 2u_{n-1} + (k-1)\, u_{n-2}, \qquad u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 1+k,$$

où k est un nombre réel donné.

6.19 Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) de nombres réels définies par

$$u_n = \tfrac{1}{3}(u_{n-1} + 2v_{n-1}),$$
$$v_n = \tfrac{1}{3}(2u_{n-1} + v_{n-1}),$$

et par les valeurs initiales u_0 et v_0.

CHAPITRE 7

LES MATRICES

7.1 Matrices et applications linéaires. Nous avons vu qu'une application linéaire U d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F est déterminée par ses valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sur les éléments $e_1, e_2, \ldots, e_p$ d'une base B de E. Supposons l'espace vectoriel F de dimension n, et considérons une base $C=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de F. Pour tout élément j de $[1, p]$, nous pouvons décomposer le vecteur y_j dans cette dernière base :

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i .$$

Réciproquement, la donnée de np scalaires α_{ij} détermine une application linéaire U de E dans F et une seule telle que, pour tout élément j de $[1, p]$,

$$U(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i .$$

Il s'ensuit que, dans les calculs explicites, et plus spécialement dans les calculs numériques, on peut représenter une application linéaire U par une famille de np scalaires.

Soient K un corps commutatif, n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle *matrice* à n lignes et p colonnes à éléments dans K toute famille $M=(\alpha_{ij})$ de scalaires dont l'ensemble d'indices est le produit cartésien $[1, n] \times [1, p]$.

Lorsque $n=1$, on dit que M est une matrice ligne; lorsque $p=1$, on dit que M est une matrice colonne. Lorsque $n=p$, on dit que M est une matrice carrée d'ordre n.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à éléments dans K se note $\mathbf{M}_{n,p}(K)$; l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à éléments dans K se note plus simplement $\mathbf{M}_n(K)$.

On représente dans les calculs explicites une matrice à n lignes et p colonnes par un tableau

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

Considérons de nouveau les espaces vectoriels E et F, munis respectivement de bases $B=(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $C=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, et l'unique application linéaire U

de E dans F qui à tout élément e_j de B associe

$$U(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i .$$

La matrice $M = (\alpha_{ij})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, dite matrice associée à l'application linéaire U dans les bases B et C, et notée $M_{B,C}(U)$.

La matrice M a donc pour j-ième colonne la famille des composantes dans la base C du transformé par U du j-ième vecteur de la base B.

En particulier, soient E un espace vectoriel de dimension p sur K, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et U un endomorphisme de E. La matrice $M_{B,B}(U)$ est une matrice carrée d'ordre p, dite associée à l'endomorphisme U dans la base B, et notée plus simplement $M_B(U)$.

Inversement, pour tout élément $M = (\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, il existe une application linéaire U de E dans F et une seule telle que

$$M_{B,C}(U) = (\alpha_{ij}) .$$

On peut calculer les composantes dans la base C du transformé $U(\boldsymbol{x})$ d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E en fonction des composantes de $\boldsymbol{x}$ dans la base B de la façon suivante : on écrit

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} \xi_j e_j \qquad \text{et} \qquad U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i .$$

Alors, pour tout élément i de $[1, n]$,

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \xi_j . \tag{1}$$

En effet,

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j \, U(e_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \xi_j \alpha_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \xi_j \right) f_i .$$

La formule (1) en résulte, vu l'unicité de la décomposition du vecteur $U(\boldsymbol{x})$ dans la base C.

EXEMPLE. *On suppose que $n = 2$, $p = 3$ et que la matrice associée à U dans les bases B et C est*

$$\begin{pmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \end{pmatrix} .$$

Déterminer les composantes dans la base C de l'image du vecteur $\boldsymbol{x}$ de E ayant pour composantes 1, -1 *et* 2 *dans la base B.*

La règle précédente conduit à

$$\eta_1 = 33 \times 1 + 16 \times (-1) + 72 \times 2 = 161 ,$$
$$\eta_2 = -24 \times 1 - 10 \times (-1) - 57 \times 2 = -128 .$$

Nous avons pu considérer une matrice à n lignes et p colonnes à éléments dans K comme la matrice associée à une application linéaire de E dans F, ces espaces vectoriels étant munis de bases.

On peut toujours considérer un élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ comme la matrice associée à une application linéaire U de K^p dans K^n, ces espaces vectoriels étant munis de leurs bases canoniques; l'application linéaire U est dite *canoniquement associée* à la matrice M. En particulier, pour toute matrice carrée M d'ordre n à éléments dans K, il existe un endomorphisme U de K^n et un seul dont la matrice associée dans la base canonique de K^n soit M; l'endomorphisme U est dit canoniquement associé à la matrice carrée M.

7.2 Opérations sur les matrices.

1. Opérations linéaires. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n sur K, $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $C = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F. Nous allons munir $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ d'une structure d'espace vectoriel de telle sorte que la bijection de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ précédemment définie soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soient U_1 et U_2 deux applications linéaires de E dans F, (α_{ij}) et (β_{ij}) les matrices associées à U_1 et à U_2 dans les bases B et C, λ_1 et λ_2 deux scalaires. Alors, pour tout élément j de $[1, p]$,

$$(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 \alpha_{ij} + \lambda_2 \beta_{ij}) f_i ;$$

d'où la relation

$$M_{B,C}(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) = (\gamma_{ij}),$$

où

$$\gamma_{ij} = \lambda_1 \alpha_{ij} + \lambda_2 \beta_{ij}.$$

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

Soit $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à éléments dans K.

On appelle somme de deux éléments $M_1 = (\alpha_{ij})$ et $M_2 = (\beta_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, et on note $M_1 + M_2$, l'élément (γ_{ij}) de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ défini pour tout couple (i, j) d'indices par la relation

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}.$$

On appelle produit d'un élément $M = (\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ par un scalaire λ, et on note λM, l'élément (β_{ij}) de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ défini pour tout couple (i, j) d'indices par la relation

$$\beta_{ij} = \lambda \alpha_{ij}.$$

Muni des deux lois ainsi définies, l'ensemble $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ est un espace vectoriel sur K, et l'application de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ qui, à toute application linéaire U de E dans F, associe la matrice $M_{B,C}(U)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

EXEMPLES. La somme des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

est

$$M+N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le produit de la matrice M par -2 est

$$-2M = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -4 & -2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout couple (i,j) d'indices, on désigne par M_{ij} la matrice (α_{kl}), où $\alpha_{kl}=0$ sauf si $k=i$ et $l=j$, auquel cas $\alpha_{kl}=1$. Il est immédiat que tout élément $M=(\beta_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme

$$M = \sum_{i,j} \beta_{ij} M_{ij}.$$

Les matrices M_{ij} constituent donc une base de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, lequel est de dimension np.

Il en résulte que l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est lui aussi de dimension np.

En particulier, l'espace vectoriel dual E^* d'un espace vectoriel E de dimension p est encore un espace vectoriel de dimension p.

EXEMPLE. Les matrices à deux lignes et trois colonnes constituent un espace vectoriel de dimension 6 ; une base de cet espace vectoriel est constituée par les six matrices ci-dessous:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Multiplication des matrices. Soient maintenant E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions respectives p, n et m sur K, $B=(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, $C=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de F et $D=(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une base de G.

Soient d'autre part U une application linéaire de E dans F et V une application linéaire de F dans G. Nous allons définir le produit NM d'un élément N de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$ par un élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ de telle sorte que

$$M_{C,D}(V)\, M_{B,C}(U) = M_{B,D}(V \circ U).$$

Soient donc (α_{ij}) la matrice associée à U dans les bases B et C et (β_{hi}) la matrice associée à V dans les bases C et D. Alors, pour tout élément j de $[1, p]$,

$$(V \circ U)(e_j) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, V(f_i) = \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{hi}\right) g_h.$$

La matrice associée à $V \circ U$ dans les bases B et D est donc la matrice (γ_{hj}), où, pour tout couple (h, j) d'indices,

$$\gamma_{hj} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{hi}\alpha_{ij}.$$

Nous sommes ainsi conduits à poser la définition suivante :

On appelle *produit* d'un élément $M = (\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ par un élément $N = (\beta_{hi})$ de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$, et on note NM, l'élément (γ_{hj}) de $\mathbf{M}_{m,p}(K)$ défini pour tout couple (h, j) d'indices par la relation

$$\gamma_{hj} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{hi}\alpha_{ij}.$$

On obtient donc le scalaire γ_{hj} en prenant la h-ième ligne de N, la j-ième colonne de M et en ajoutant les produits des éléments de même indice (règle de multiplication « ligne par colonne»).

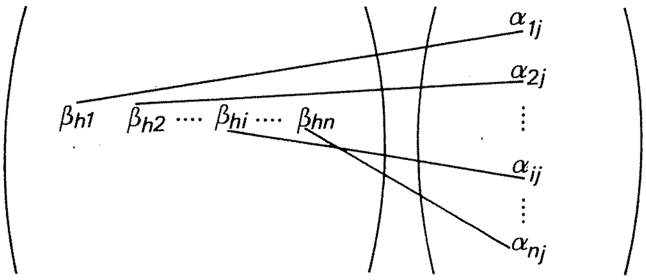


FIG. 7.1

On remarquera que le produit NM n'est défini que si le nombre de colonnes de N est égal au nombre de lignes de M :

$$\begin{array}{cccc} & n \text{ colonnes} & p \text{ colonnes} & \\ m \text{ lignes} & \begin{pmatrix} & N & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & M & \end{pmatrix} & n \text{ lignes} \end{array}$$

EXEMPLE. *Calculer le produit des matrices*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

La règle du produit ligne par colonne conduit à

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 1\times 5+4\times(-1)+3\times 7 = 22 \\ \gamma_{12} &= 1\times 0+4\times 2+3\times 2 = 14 \\ \gamma_{21} &= -2\times 5+2\times(-1)+3\times 7 = 9 \\ \gamma_{22} &= -2\times 0+2\times 2+3\times 2 = 10. \end{aligned}$$

D'où

$$NM = \begin{pmatrix} 22 & 14 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de colonnes de M étant égal au nombre de lignes de N, on peut aussi calculer le produit MN. On trouve par le même procédé

$$MN = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 15 \\ -5 & 0 & 3 \\ 3 & 32 & 27 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés suivantes découlent aussitôt des propriétés de la composition des applications linéaires :

Pour tout couple (M, M') d'éléments de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, pour tout couple (N, N') d'éléments de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$ et pour tout couple (λ, μ) de nombres réels,

$$\begin{aligned} (N+N')\,M &= NM+N'M, \\ N(M+M') &= NM+NM', \\ (\mu N)\,(\lambda M) &= (\mu\lambda)\,(NM). \end{aligned}$$

Pour tout élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, pour tout élément N de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$ et pour tout élément P de $\mathbf{M}_{l,m}(K)$,

$$(PN)\,M = P(NM).$$

Considérons enfin le cas où $E = F = G$; nous obtenons les résultats suivants :

7.3 Anneau des matrices carrées. Soit n un entier naturel non nul.

Muni de l'addition et de la multiplication interne, l'ensemble $\mathbf{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n est un anneau unitaire; l'élément unité est la matrice (α_{ij}), notée I_n, telle que $\alpha_{ij}=0$ si $i \neq j$, et $\alpha_{ij}=1$ si $i=j$:

$$I_1 = (1) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques. Considérons l'élément

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$. Il est immédiat que $M^2 = 0$, ce qui montre que M est un diviseur de zéro dans l'anneau $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

Considérons maintenant les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$PQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'anneau $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ n'est pas commutatif.

En fait, la multiplication interne est une application bilinéaire. L'ensemble $\mathbf{M}_n(K)$ est donc muni d'une structure d'algèbre. Cette algèbre est associative et unitaire.

7.4 Transposée d'une matrice. Soit $M=(\alpha_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes à éléments dans K. On appelle transposée de M, et on note ${}^tM$, l'élément de $\mathbf{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont les lignes de M :

$${}^tM = (\alpha_{ji}).$$

On déduit immédiatement de cette définition les assertions suivantes :

L'application $M \mapsto {}^tM$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ sur l'espace vectoriel $\mathbf{M}_{p,n}(K)$.

Pour tout élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ et pour tout élément N de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$,

$${}^t(NM) = {}^tM\,{}^tN.$$

Pour tout élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$,

$${}^t({}^tM) = M.$$

EXEMPLE. Nous avons vu que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 14 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre que

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}.$$

7.5 Matrices de passage. Nous nous proposons d'étudier l'effet d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur, et celui d'un changement de bases sur la matrice associée à une application linéaire. Nous devons pour cela introduire la définition suivante :

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur K. On considère deux bases $B=(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $B'=(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ de E, appelées respectivement ancienne et nouvelle base. Pour tout élément j de $[1, p]$, le vecteur e'_j se décompose dans la base B sous la forme

$$e'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i .$$

L'élément $P=(\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_p(K)$ s'appelle matrice de passage de la base B à la base B'; ses colonnes sont constituées des anciennes composantes des nouveaux vecteurs de base.

On remarquera que la matrice P n'est autre que la matrice $M_{B',B}(I_E)$ associée à l'application identique de E dans les bases B' et B.

Composition des changements de base. Soient E un espace vectoriel de dimension p sur K, B, B' et B'' trois bases de E, P la matrice de passage de B à B' et P' la matrice de passage de B' à B''. La matrice de passage de B à B'' n'est autre que la matrice PP'

En effet, $I_E = I_E \circ I_E$, et

$$M_{B'',B}(I_E) = M_{B',B}(I_E)\, M_{B'',B'}(I_E).$$

Il en résulte que *la matrice de passage de B à B' est inversible, et son inverse n'est autre que la matrice de passage de B' à B.* Il suffit pour le voir d'appliquer la proposition précédente au cas où $B''=B$.

On notera que, pour toute base B de E et pour toute matrice carrée inversible P d'ordre p, il existe une base B' de E et une seule telle que la matrice de passage de B à B' soit P.

Effet d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur. Soit x un vecteur de E, écrit sous les formes suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i, \qquad x = \sum_{j=1}^{p} \xi'_j e'_j.$$

Les anciennes composantes de x sont liées aux nouvelles par la relation

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \xi'_j.$$

Reportons en effet la valeur de e'_j en fonction des vecteurs e_i dans la deuxième expression de x :

$$\sum_{j=1}^{p} \xi'_j e'_j = \sum_{j=1}^{p} \xi'_j \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \xi'_j \right) e_i.$$

L'unicité de la décomposition de x dans l'ancienne base entraîne aussitôt le résultat annoncé.

Effet d'un changement de bases sur la matrice associée à une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n sur K, U une application linéaire de E dans F, B et B' deux bases de E, C et C' deux bases de F, P la matrice de passage de B à B' et Q la matrice de passage de C à C'. Alors

$$M_{B',C'}(U) = Q^{-1} M_{B,C}(U)\, P.$$

Remarquons en effet que

$$U = I_F \circ U \circ I_E,$$

où I_E désigne l'application identique de E, et I_F l'application identique de F; on peut donc passer de E muni de la base B' à E muni de la base B au moyen de I_E, puis de E muni de la base B à F muni de la base C au moyen de U, et enfin de F muni de la base C à F muni de la base C' au moyen de I_F. D'où

$$M_{B',C'}(U) = M_{C,C'}(I_F)\, M_{B,C}(U)\, M_{B',B}(I_E).$$

Or,

$$M_{B',B}(I_E) = P \qquad \text{et} \qquad M_{C,C'}(I_F) = Q^{-1}.$$

L'assertion en découle aussitôt, et le corollaire suivant :

Soient E un espace vectoriel de dimension p sur K, U un endomorphisme de E, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Alors

$$M_{B'}(U) = P^{-1}\, M_B(U)\, P.$$

7.6 Matrices diagonales. On dit qu'une matrice carrée $M = (\alpha_{ij})$ d'ordre n est diagonale si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[1, n]$, $\alpha_{ij} = 0$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une suite de n éléments de K; la matrice diagonale (α_{ij}) telle que, pour tout élément h de $[1, n]$, $\alpha_{hh} = \lambda_h$, se note diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

On peut interpréter géométriquement cette définition. En effet, soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur K, U un endomorphisme de E et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour que la matrice $M_B(U)$ associée à U dans la base B soit diagonale, il faut et il suffit que, pour tout élément j de $[1, n]$, la droite engendrée par e_j soit stable par U.

Supposons d'abord que $M_B(U)$ soit de la forme diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Alors, pour tout élément j de $[1, n]$, $U(e_j) = \lambda_j e_j$. Il en découle aussitôt que la droite engendrée par e_j est stable par U.

Réciproquement, si la droite engendrée par e_j est stable par U, il existe un scalaire λ_j tel que $U(e_j) = \lambda_j e_j$. Il s'ensuit que la matrice $M_B(U)$ est la matrice diagonale diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

EXEMPLES.

1. La matrice unité I_n est évidemment diagonale. Plus généralement, pour tout scalaire α, la matrice αI_n est diagonale; une telle matrice est dite scalaire. L'application $\alpha \mapsto \alpha I_n$ est un isomorphisme du corps K sur l'ensemble des matrices scalaires.

2. Soient p un entier naturel inférieur à n et $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, où $\lambda_j = 1$ si $j \leqslant p$ et $\lambda_j = 0$ si $j \geqslant p+1$. L'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M est le projecteur sur le sous-espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs de la base canonique parallèlement au sous-espace vectoriel engendré par les $n-p$ derniers.

Les matrices diagonales ont un certain nombre de propriétés; en voici une, immédiate :

L'ensemble $\mathbf{D}_n(K)$ des matrices diagonales d'ordre n à éléments dans K est une sous-algèbre commutative unitaire de l'algèbre unitaire $\mathbf{M}_n(K)$.

De plus, pour tout élément h de $[1, n]$, l'application $f_h : \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_h$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbf{D}_n(K)$ dans K.

Et une autre, tout aussi importante :

Soit $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbf{D}_n(K)$. Pour que M soit inversible, il faut et il suffit que $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \neq 0$; l'inverse de M est alors la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.

Soit en effet U l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M. Supposons que M soit inversible, et donc que U soit un automorphisme de K^n. Pour tout élément h de $[1, n]$, la droite engendrée par le h-ième vecteur de la base canonique B de K^n est stable par U; on en déduit aisément qu'elle est stable par U^{-1}. La matrice

$$M^{-1} = M_B(U^{-1})$$

est donc diagonale. La relation $f_h(MM^{-1}) = 1$ montre que, pour tout élément h de $[1, n]$, $\lambda_h \neq 0$.

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée; il découle de l'assertion 1 que la matrice $\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$ est inverse de M.

EXERCICES

Calculer les produits de matrices

7.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.5 $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.6 $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.7 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

7.8 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

7.9 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.10 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.11 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

7.12 $(3 \quad -4)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

7.13 Calculer la matrice A^2-5A, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.14 Calculer la matrice A^2-2A, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.15 Calculer la matrice $(A-I_3)\,(A-2I_3)\,(A-3I_3)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.16 Calculer la matrice $(A+I_3)\,(A-3I_3)\,(A+2I_3)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.17 On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont trois nombres réels. Établir une relation simple entre M et M^3.

7.18 Soient E un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$ et U un endomorphisme de E.

a) Montrer que si U n'est pas une homothétie, il existe une base B de E dans laquelle la matrice associée à U est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix},$$

où α et β sont deux nombres réels.

b) En déduire que, pour tout endomorphisme U de E, il existe deux nombres réels a et b tels que

$$U^2 - aU + bI_E = 0.$$

7.19 On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe deux entiers rationnels α_n et β_n tels que

$$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3 .$$

Calculer α_n et β_n.

7.20 Montrer que l'ensemble G des matrices

$$M_a = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos a} & -\operatorname{tg} a \\ -\operatorname{tg} a & \dfrac{1}{\cos a} \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbf{R}$, $a \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, est un groupe multiplicatif. Ce groupe est-il commutatif?

7.21 On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soient α un nombre réel et U l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $U^3 = 0$.

b) Soit f l'application qui à tout nombre réel x associe l'endomorphisme

$$I + xU + \frac{x^2}{2} U^2 ,$$

où I désigne l'application identique de $\mathbf{R}^3$.

Montrer que, pour tout couple (x, y) de nombres réels,

$$f(x+y) = f(x) f(y) .$$

En déduire que, pour tout nombre réel x, l'endomorphisme $f(x)$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$, et déterminer l'application réciproque.

7.22 Soit $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à éléments réels. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que l'application U de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ dans lui-même définie par la formule

$$U(M) = PM$$

est linéaire.

b) Expliciter la matrice associée à U dans la base B de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer l'image et le noyau de U.

CHAPITRE 8

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

8.1 Déterminants d'ordre 2. Reprenons l'étude des applications bilinéaires, abordée au chapitre 5.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et f une application bilinéaire de E^2 dans F. On dit que f est *symétrique* si, pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de vecteurs de E, $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. On dit que f est *alternée* si, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$.

EXEMPLES.

1. Soient g et g' deux formes linéaires sur un espace vectoriel E. L'application $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto g(\boldsymbol{x}) . g'(\boldsymbol{y})$ est une forme bilinéaire sur E. L'application $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto g(\boldsymbol{x}).g'(\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{y}).g'(\boldsymbol{x})$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. L'application $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto g(\boldsymbol{x}).g'(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{y}).g'(\boldsymbol{x})$ est une forme bilinéaire alternée sur E.

2. En géométrie, on rencontre un exemple fondamental de forme bilinéaire symétrique, à savoir le produit scalaire (voir chapitre 12).

Il est immédiat que :

1. Les applications bilinéaires de E^2 dans F constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E^2 dans F.

2. Les applications bilinéaires symétriques et les applications bilinéaires alternées constituent deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des applications bilinéaires de E^2 dans F.

D'autre part, soit f une application bilinéaire alternée de E^2 dans F. Alors, pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de vecteurs de E, $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

En effet, puisque f est bilinéaire,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Puisque f est alternée,

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0$$

et

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = 0.$$

Finalement,

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0,$$

ce qu'il fallait prouver.

Les formes bilinéaires alternées nous permettent de définir maintenant le déterminant de deux vecteurs.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur K. L'espace vectoriel $\mathscr{A}_2(E)$ des formes bilinéaires alternées sur E est de dimension 1.

Plus précisément, pour toute base $B = (e_1, e_2)$ de E, il existe une forme bilinéaire alternée sur E et une seule prenant la valeur 1 sur (e_1, e_2); on l'appelle déterminant dans la base B, et on la note Det_B. Le déterminant dans la base B constitue une base de $\mathscr{A}_2(E)$ et, pour toute forme bilinéaire alternée f sur E,

$$f = f(e_1, e_2)\,\mathrm{Det}_B.$$

Considérons en effet deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E, décomposés dans la base B sous la forme

$$\begin{aligned} x &= u_1 e_1 + u_2 e_2, \\ y &= v_1 e_1 + v_2 e_2. \end{aligned}$$

Alors, pour tout élément f de $\mathscr{A}_2(E)$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(u_1 e_1 + u_2 e_2, v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 v_1 f(e_1, e_1) + u_1 v_2 f(e_1, e_2) + u_2 v_1 f(e_2, e_1) + u_2 v_2 f(e_2, e_2). \end{aligned}$$

Or,

$$f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(e_1, e_2) = -f(e_2, e_1).$$

Donc

$$f(x, y) = (u_1 v_2 - u_2 v_1) f(e_1, e_2), \tag{1}$$

ce qui montre en particulier l'unicité d'une forme bilinéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur (e_1, e_2).

Réciproquement, il est immédiat que l'application

$$\mathrm{Det}_B : (x, y) \mapsto u_1 v_2 - u_2 v_1$$

est une forme bilinéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur (e_1, e_2). Cette forme bilinéaire alternée n'étant pas nulle, la formule (1) montre que l'espace vectoriel $\mathscr{A}_2(E)$ est de dimension 1 et que Det_B en constitue une base. La décomposition d'un élément f de $\mathscr{A}_2(E)$ dans cette base découle aussitôt de la formule (1).

Le déterminant de deux vecteurs a deux propriétés très importantes :

1. Le déterminant de deux vecteurs dans la base B ne change pas lorsqu'on ajoute à l'un de ces vecteurs un vecteur colinéaire à l'autre.
2. Pour que deux vecteurs de E soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que leur déterminant dans la base B soit différent de 0.

Assertion 1. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de E et α un scalaire. Puisque l'application Det_B est bilinéaire,

$$\mathrm{Det}_B(x, y + \alpha x) = \alpha\,\mathrm{Det}_B(x, x) + \mathrm{Det}_B(x, y)\,;$$

puisque Det_B est alternée,

$$\mathrm{Det}_B(x, x) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Det}_B(x, y + \alpha x) = \mathrm{Det}_B(x, y)\,.$$

De même,

$$\mathrm{Det}_B(x+\alpha y, y) = \mathrm{Det}_B(x, y).$$

Assertion 2. Soient x et y deux vecteurs de E.

Supposons d'abord que la famille (x, y) ne soit pas libre; les vecteurs x et y étant colinéaires, $\mathrm{Det}_B(x, y) = 0$.

Supposons maintenant que la famille (x, y) soit libre; c'est donc une base B' de E. La relation

$$\mathrm{Det}_B = \mathrm{Det}_B(x, y)\ \mathrm{Det}_{B'}$$

implique que $\mathrm{Det}_B(x, y) \neq 0$.

8.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2. Soit

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

une matrice carrée d'ordre 2. On appelle déterminant de M, et on note Det M, ou encore

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

le déterminant des vecteurs $(\alpha_{11}, \alpha_{21})$ et $(\alpha_{12}, \alpha_{22})$ dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$ de K^2.

Autrement dit,

$$\mathrm{Det}\, M = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Soit U l'endomorphisme de K^2 canoniquement associé à M; alors

$$\mathrm{Det}\, M = \mathrm{Det}_B(U(e_1), U(e_2)).$$

Il est immédiat que le déterminant de la matrice I_2 est égal à 1; plus généralement, pour tout scalaire α, le déterminant de la matrice αI_2 est égal à α^2.

D'autre part, le déterminant du produit NM de deux matrices carrées M et N d'ordre 2 est égal au produit de leurs déterminants :

$$\mathrm{Det}\, NM = (\mathrm{Det}\, N) . (\mathrm{Det}\, M).$$

En effet, soient U et V les endomorphismes de K^2 canoniquement associés à M et à N. L'application

$$f : (x, y) \mapsto \mathrm{Det}_B(V(x), V(y))$$

est évidemment une forme bilinéaire alternée sur K^2. Donc

$$f = f(e_1, e_2)\ \mathrm{Det}_B.$$

En particulier, si $x = U(e_1)$ et $y = U(e_2)$,

$$f(U(e_1), U(e_2)) = f(e_1, e_2)\ \mathrm{Det}_B(U(e_1), U(e_2)).$$

Or,

$$f(U(e_1),\ U(e_2)) = \mathrm{Det}_B((VU)(e_1),\ (VU)(e_2)) = \mathrm{Det}\, NM,$$
$$f(e_1, e_2) = \mathrm{Det}_B(V(e_1),\ V(e_2)) = \mathrm{Det}\, N$$

et

$$\mathrm{Det}_B(U(e_1),\ U(e_2)) = \mathrm{Det}\, M.$$

Il en résulte une caractérisation très commode des *matrices carrées d'ordre 2 inversibles.* Soit M une matrice carrée d'ordre 2. Pour que M soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul. Dans ces conditions,

$$\mathrm{Det}\, M^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}\, M}.$$

Supposons d'abord que M soit inversible; alors

$$\mathrm{Det}(MM^{-1}) = (\mathrm{Det}\, M) . (\mathrm{Det}\, M^{-1}) = \mathrm{Det}\, I_2 = 1,$$

ce qui montre que $\mathrm{Det}\, M$ est non nul et que

$$\mathrm{Det}\, M^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}\, M}.$$

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Det}\, M$ soit non nul. Soient U l'endomorphisme de K^2 canoniquement associé à M et $B=(e_1, e_2)$ la base canonique de K^2. La relation $\mathrm{Det}_B(U(e_1),\ U(e_2)) \neq 0$ montre que $(U(e_1),\ U(e_2))$ est une base de K^2. Donc U est un automorphisme de K^2, et la matrice M est inversible.

8.3 Déterminant d'un endomorphisme. Soient E un espace vectoriel de dimension 2 sur K et U un endomorphisme de E. Le déterminant de la matrice $M_B(U)$ dans une base $B=(e_1, e_2)$ de E ne dépend pas de la base B considérée; on l'appelle déterminant de l'endomorphisme U, et on le note $\mathrm{Det}\, U$.

Soient en effet $B=(e_1, e_2)$ et $B'=(e'_1, e'_2)$ deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Alors

$$M_{B'}(U) = P^{-1} M_B(U)\, P.$$

D'où

$$\mathrm{Det}\, M_{B'}(U) = (\mathrm{Det}\, P^{-1}) . (\mathrm{Det}\, M_B(U)) . (\mathrm{Det}\, P) = \mathrm{Det}\, M_B(U),$$

ce qu'il fallait prouver.

Les propriétés du déterminant d'un endomorphisme se déduisent aussitôt des propriétés correspondantes du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

1. Le déterminant de l'application identique de E est égal à 1 ; plus généralement, pour tout scalaire α, le déterminant de l'homothétie de rapport α est égal à α^2.

2. Le déterminant du composé VU de deux endomorphismes U et V de E est égal au produit de leurs déterminants :

$$\mathrm{Det}\, VU = (\mathrm{Det}\, V) . (\mathrm{Det}\, U).$$

Il en résulte une *caractérisation des endomorphismes inversibles.* Soit U un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 2 sur K. Pour que U soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul. Dans ces conditions,

$$\operatorname{Det} U^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det} U}.$$

8.4 Systèmes de deux équations linéaires à plusieurs inconnues. Considérons un système de deux équations linéaires à p inconnues :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \ldots + \alpha_{1j}u_j + \ldots + \alpha_{1p}u_p = \beta_1 \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \ldots + \alpha_{2j}u_j + \ldots + \alpha_{2p}u_p = \beta_2, \end{cases}$$

à coefficients dans K.

Introduisons les vecteurs de K^2 suivants :

$$\boldsymbol{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}), \boldsymbol{a}_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}), \ldots, \boldsymbol{a}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}), \ldots, \boldsymbol{a}_p = (\alpha_{1p}, \alpha_{2p}),$$
$$\text{et} \quad \boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2).$$

Le système (S) est équivalent à l'unique équation vectorielle

$$(\mathrm{S}') \qquad u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + u_j\boldsymbol{a}_j + \ldots + u_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}.$$

Nous pouvons donc affirmer que le système (S) admet des solutions si et seulement si le vecteur $\boldsymbol{b}$ appartient au sous-espace vectoriel de K^2 engendré par les vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_p$.

8.5 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. Considérons le cas particulier où $p = 2$:

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 = \beta_2, \end{cases}$$

ou

$$(\mathrm{S}') \qquad u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}.$$

Supposons que les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ soient linéairement indépendants. Ces vecteurs constituent donc une base de K^2; le vecteur $\boldsymbol{b}$ se décompose d'une manière et d'une seule dans cette base. Le système (S) admet alors une solution et une seule.

Nous allons reprendre l'étude précédente en utilisant les déterminants de deux vecteurs.

Puisque l'application Det est une forme bilinéaire alternée,

$$\operatorname{Det}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{Det}(u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = u_1 \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$$
$$\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2) = u_2 \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2).$$

Si $\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ *est non nul*, c'est-à-dire si les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ sont linéairement indépendants, l'unique solution du système (S) est donnée par les formules suivantes, dites *formules de Cramer* :

$$u_1 = \frac{\operatorname{Det}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2)}{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}, \qquad u_2 = \frac{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})}{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)},$$

soit :

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}, \qquad u_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}},$$

ou encore :

$$u_1 = \frac{\beta_1\alpha_{22}-\beta_2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}}, \qquad u_2 = \frac{\beta_2\alpha_{11}-\beta_1\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}}.$$

Si $\mathrm{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ *est nul*, nous voyons qu'une condition nécessaire pour que le système (S) ait une solution est que

$$\begin{cases} \mathrm{Det}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2) = 0 \\ \mathrm{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = 0. \end{cases}$$

Supposons réciproquement cette condition vérifiée. Distinguons alors deux cas :

a) *Les vecteurs* $\boldsymbol{a}_1$ *et* $\boldsymbol{a}_2$ *sont nuls.* Il est nécessaire que $\boldsymbol{b}$ le soit. Les nombres réels u_1 et u_2 sont alors indéterminés.

b) *L'un au moins des vecteurs* $\boldsymbol{a}_1$ *et* $\boldsymbol{a}_2$ *n'est pas nul.* Supposons par exemple $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$. Puisque la famille $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ est liée, il existe un nombre réel λ tel que $\boldsymbol{a}_2 = \lambda \boldsymbol{a}_1$. Puisque la famille $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})$ est liée, il existe un nombre réel μ tel que $\boldsymbol{b} = \mu \boldsymbol{a}_1$. Le système (S) s'écrit alors

$$(u_1+\lambda u_2-\mu)\, \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}.$$

Puisque $\boldsymbol{a}_1$ est non nul,

$$u_1+\lambda u_2-\mu = 0.$$

On peut choisir arbitrairement u_2, et calculer u_1.

8.6 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2. Nous pouvons encore interpréter l'équation

$$u_1 \boldsymbol{a}_1 + u_2 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}$$

en introduisant l'unique endomorphisme U de K^2 muni de sa base canonique $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ tel que

$$U(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1,$$
$$U(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a}_2.$$

Cet endomorphisme a donc pour matrice associée dans la base canonique de K^2

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

L'équation (S′) s'écrit encore

$$(S'') \qquad U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b},$$

où le vecteur inconnu $\boldsymbol{x}$ a pour composantes u_1 et u_2.

L'équation (S″) admet une solution et une seule quel que soit $\boldsymbol{b}$ si et seulement si U est bijectif, autrement dit si et seulement si U est inversible, ou encore si et seulement si M est inversible. Sous cette hypothèse, donnons successivement à $\boldsymbol{b}$ les valeurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$. Les solutions correspondantes sont $U^{-1}(\boldsymbol{e}_1)$ et $U^{-1}(\boldsymbol{e}_2)$, dont les composantes constituent les colonnes de la matrice M^{-1} inverse de M.

En résumé, pour calculer l'inverse d'une matrice carrée M d'ordre 2 de déterminant non nul, il suffit de résoudre le système (S) en prenant successivement pour second membre (1, 0) et (0, 1).

Or, la solution de

$$\begin{cases} \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_1 = 1 \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 = 0 \end{cases}$$

est

$$u_1 = \alpha_{22}/\Delta, \qquad u_2 = -\alpha_{21}/\Delta,$$

où

$$\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

De même, la solution de

$$\begin{cases} \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 = 0 \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 = 1 \end{cases}$$

est

$$u_1 = -\alpha_{12}/\Delta, \qquad u_2 = \alpha_{11}/\Delta.$$

Finalement,

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE. La matrice inverse de

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

8.7 Systèmes de deux équations linéaires homogènes à trois inconnues. Considérons le système

$$\begin{cases}\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 = 0\\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 = 0.\end{cases}$$

Supposons que les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ soient linéairement indépendants. Nous pouvons choisir arbitrairement u_3, et calculer alors u_1 et u_2 par les formules de Cramer :

$$u_1 = \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}\, u_3,$$

$$u_2 = \frac{\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}\, u_3.$$

Il s'ensuit que les solutions constituent un espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur de composantes

$$\begin{aligned}&\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}\\ &\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}\\ &\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.\end{aligned}$$

Ce résultat reste valable si les vecteurs $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{a}_3$, ou les vecteurs $\boldsymbol{a}_3$ et $\boldsymbol{a}_1$, sont linéairement indépendants.

On écrit souvent les solutions sous la forme

$$\frac{u_1}{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}} = \frac{u_2}{\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}} = \frac{u_3}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}},$$

avec la convention suivante : si l'un des dénominateurs est nul, il en est de même du numérateur correspondant.

Supposons enfin que les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{a}_3$ soient colinéaires et non tous nuls. Si par exemple $\boldsymbol{a}_1$ est non nul, nous pouvons choisir arbitrairement u_2 et u_3, et calculer alors u_1.

8.8 Applications trilinéaires. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. On dit qu'une application f de E^3 dans F est trilinéaire si

a) pour tout couple $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de vecteurs de E, l'application

$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

est linéaire ;

b) pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ de vecteurs de E, l'application

$$\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

est linéaire ;

c) pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, l'application

$$z \mapsto f(x, y, z)$$

est linéaire.

On dit que f est alternée si $f(x, y, z)$ est nul dès que deux des trois vecteurs x, y et z sont égaux.

Les applications trilinéaires de E^3 dans K s'appellent formes trilinéaires sur E.

EXEMPLES. Soient g, g' et g'' trois formes linéaires sur un espace vectoriel E. L'application de E^3 dans K

$$(x, y, z) \mapsto g(x) \,.\, g'(y) \,.\, g''(z)$$

est une forme trilinéaire sur E.

L'application

$$(x, y, z) \mapsto g(x) \,.\, g'(y) \,.\, g''(z) + g(y) \,.\, g'(z) \,.\, g''(x) + g(z) \,.\, g'(x) \,.\, g''(y) \\ - g(y) \,.\, g'(x) \,.\, g''(z) - g(z) \,.\, g'(y) \,.\, g''(x) - g(x) \,.\, g'(z) \,.\, g''(y)$$

est une forme trilinéaire alternée.

Soit f une forme trilinéaire alternée. Puisque les applications

$$(y, z) \mapsto f(x, y, z)$$
$$(z, x) \mapsto f(x, y, z)$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y, z)$$

sont des formes bilinéaires alternées, $f(x, y, z)$ est changé en son opposé lorsqu'on permute deux des vecteurs x, y, et z.

Les applications trilinéaires de E^3 dans F constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E^3 dans F. Les applications trilinéaires alternées constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications trilinéaires de E^3 dans F.

8.9 Déterminant de trois vecteurs. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur K. L'espace vectoriel $\mathscr{A}_3(E)$ des formes trilinéaires alternées sur E est de dimension 1.

Plus précisément, pour toute base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de E, il existe une forme trilinéaire alternée sur E et une seule prenant la valeur 1 sur (e_1, e_2, e_3); on l'appelle déterminant dans la base B, et on la note Det_B. Le déterminant dans la base B constitue une base de $\mathscr{A}_3(E)$ et, pour toute forme trilinéaire alternée f sur E,

$$f = f(e_1, e_2, e_3)\,\mathrm{Det}_B.$$

Considérons en effet trois vecteurs x, y et z de E, décomposés dans la base B sous la forme

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3,$$
$$y = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3,$$
$$z = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3.$$

Alors, pour tout élément f de $\mathscr{A}_3(E)$, le développement de $f(x, y, z)$ comporte $3^3 = 27$ termes. Puisque f est alternée, il ne reste dans la somme précédente que les six termes correspondant aux six permutations des vecteurs e_1, e_2, e_3.

De plus,

$$\begin{aligned}
&f(e_2, e_1, e_3) = f(e_1, e_3, e_2) = f(e_3, e_2, e_1) = -f(e_1, e_2, e_3),\\
&f(e_2, e_3, e_1) = -f(e_2, e_1, e_3) = f(e_1, e_2, e_3),\\
&f(e_3, e_1, e_2) = -f(e_1, e_3, e_2) = f(e_1, e_2, e_3),
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) = (&u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2 -\\
&- u_3v_2w_1) f(e_1, e_2, e_3),
\end{aligned}$$

ce qui montre en particulier l'unicité d'une forme trilinéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur (e_1, e_2, e_3).

La démonstration s'achève alors comme dans le cas des formes bilinéaires alternées.

Comme pour les déterminants d'ordre 2, étant donné E un espace vectoriel de dimension 3 sur K et B une base de E, on a les propriétés suivantes :

1. Le déterminant de trois vecteurs dans la base B ne change pas lorsqu'on ajoute à l'un de ces vecteurs une combinaison linéaire des deux autres.
2. Pour que trois vecteurs de E soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que leur déterminant dans la base B soit différent de 0.

La démonstration est calquée sur celle faite pour l'ordre 2.

8.10 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3. Soit

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

une matrice carrée d'ordre 3. On appelle déterminant de M, et on note Det M, ou encore

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

le déterminant des vecteurs $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$, $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$, $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ dans la base canonique de K^3.

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} M = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} -\\
- \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}.
\end{aligned}$$

Règle de Sarrus. Un procédé mnémotechnique pour retrouver ce résultat consiste à répéter la première et la seconde colonne à droite de la troisième, et à former les produits des termes en diagonale; on affecte du signe + les produits « parallèlement à la diagonale principale », et du signe − les trois autres produits.

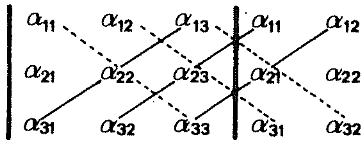


FIG. 8.1 Règle de Sarrus.

EXEMPLE. *Calculer*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

La règle de Sarrus conduit aussitôt à

$$(3\times(-1)\times(-2))+(1\times1\times(-1))+(1\times2\times1)-((-1)\times(-1)\times1)-$$
$$-(1\times1\times3)-((-2)\times2\times1) = 6-1+2-1-3+4 = 7.$$

8.11 Systèmes de trois équations linéaires à plusieurs inconnues. Considérons un système de trois équations linéaires à p inconnues :

$$\text{(S)}\begin{cases}\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \ldots + \alpha_{1j}u_j + \ldots + \alpha_{1p}u_p = \beta_1 \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \ldots + \alpha_{2j}u_j + \ldots + \alpha_{2p}u_p = \beta_2 \\ \alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \ldots + \alpha_{3j}u_j + \ldots + \alpha_{3p}u_p = \beta_3,\end{cases}$$

à coefficients dans K.

Introduisons les vecteurs de K^3 suivants :

$$\boldsymbol{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}),\quad \boldsymbol{a}_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}), \ldots, \boldsymbol{a}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}), \ldots,$$
$$\boldsymbol{a}_p = (\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \alpha_{3p}),\quad \text{et}\quad \boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Le système (S) est équivalent à l'unique équation vectorielle

$$\text{(S')}\qquad u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + u_j\boldsymbol{a}_j + \ldots + u_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}.$$

Nous pouvons donc affirmer que le système (S) admet des solutions si et seulement si le vecteur $\boldsymbol{b}$ appartient au sous-espace vectoriel de K^3 engendré par les vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_p$.

8.12 Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues. Considérons le cas particulier où $p = 3$:

$$\text{(S)}\begin{cases}\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 = \beta_1 \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 = \beta_2 \\ \alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \alpha_{33}u_3 = \beta_3,\end{cases}$$

$$\text{(S')}\qquad u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + u_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}.$$

Supposons que les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{a}_3$ soient linéairement indépendants. Ces vecteurs constituent donc une base de K^3; le vecteur $\boldsymbol{b}$ se décompose d'une manière et d'une seule dans cette base. Le système (S) admet alors une solution et une seule.

Nous allons reprendre l'étude précédente en utilisant les déterminants de trois vecteurs.

Puisque l'application Det est une forme trilinéaire alternée,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) &= \operatorname{Det}(u_1\boldsymbol{a}_1+u_2\boldsymbol{a}_2+u_3\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = u_1 \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\\
\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_3) &= \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, u_1\boldsymbol{a}_1+u_2\boldsymbol{a}_2+u_3\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) = u_2 \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\\
\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) &= \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, u_1\boldsymbol{a}_1+u_2\boldsymbol{a}_2+u_3\boldsymbol{a}_3) = u_3 \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3).
\end{aligned}$$

Si $\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ *est non nul*, c'est-à-dire si les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ sont linéairement indépendants, l'unique solution du système (S) est donnée par les formules suivantes, dites *formules de Cramer* :

$$u_1 = \frac{\operatorname{Det}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}, \quad u_2 = \frac{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_3)}{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}, \quad u_3 = \frac{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})}{\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)},$$

soit :

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}, \quad u_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}, \quad u_3 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}.$$

Si $\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ *est nul*, nous voyons qu'une condition nécessaire pour que le système (S) ait une solution est que

$$\begin{cases} \operatorname{Det}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 0 \\ \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_3) = 0 \\ \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0. \end{cases}$$

Supposons réciproquement cette condition vérifiée. Distinguons alors trois cas:

a) *Les vecteurs* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ *et* $\boldsymbol{a}_3$ *sont nuls.* Il est nécessaire que $\boldsymbol{b}$ le soit. Les nombres réels u_1, u_2 et u_3 sont alors indéterminés.

b) *Les vecteurs* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ *et* $\boldsymbol{a}_3$ *sont colinéaires et non tous nuls.* Supposons par exemple $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_2 = \lambda \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3 = \mu \boldsymbol{a}_1$. Le vecteur $\boldsymbol{b}$, devant appartenir au sous-espace vectoriel engendré par $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{a}_3$, doit être colinéaire à $\boldsymbol{a}_1$. Dans ces conditions, on peut choisir arbitrairement u_2 et u_3, et calculer alors la valeur de u_1.

c) *Les vecteurs* $\boldsymbol{a}_1$ *et* $\boldsymbol{a}_2$ *sont linéairement indépendants.* Puisque la famille $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ est liée, il existe deux nombres réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\boldsymbol{a}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2.$$

Puisque $\mathrm{Det}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0$, il existe deux nombres réels μ_1 et μ_2 tels que

$$\boldsymbol{b} = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2.$$

Le système (S) s'écrit alors

$$(u_1 + \lambda_1 u_3 - \mu_1)\, \boldsymbol{a}_1 + (u_2 + \lambda_2 u_3 - \mu_2)\, \boldsymbol{a}_2 = 0.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ étant linéairement indépendants,

$$u_1 + \lambda_1 u_3 - \mu_1 = 0,$$
$$u_2 + \lambda_2 u_3 - \mu_2 = 0.$$

On peut choisir arbitrairement u_3 et calculer u_1 et u_2.

EXEMPLE. *Résoudre le système de trois équations linéaires à trois inconnues*

$$\begin{cases} 3u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ 2u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 - 2u_3 = 2. \end{cases}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

précédemment calculé, est égal à 7. Nous pouvons donc affirmer qu'il existe une solution et une seule. Les formules de Cramer s'écrivent ici

$$u_1 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

soit

$$u_1 = 5/7, \qquad u_2 = 1/7, \qquad u_3 = -9/7.$$

8.13 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3. Nous pouvons encore interpréter l'équation

$$u_1 \boldsymbol{a}_1 + u_2 \boldsymbol{a}_2 + u_3 \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

en introduisant l'unique endomorphisme U de K^3 muni de sa base canonique $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ tel que

$$U(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \qquad U(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a}_2, \qquad U(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a}_3.$$

Cet endomorphisme a pour matrice associée dans la base canonique de K^3

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

L'équation (S′) s'écrit encore

$$(\mathrm{S}'') \qquad U(x) = \boldsymbol{b},$$

où le vecteur inconnu x a pour composantes u_1, u_2, u_3.

L'équation (S″) admet une solution et une seule quel que soit $\boldsymbol{b}$ si et seulement si U est bijectif, autrement dit si et seulement si U est inversible, ou encore si et seulement si M est inversible. Sous cette hypothèse, donnons successivement à $\boldsymbol{b}$ les valeurs e_1, e_2, e_3. Les solutions correspondantes sont $U^{-1}(e_1)$, $U^{-1}(e_2)$, $U^{-1}(e_3)$, dont les composantes constituent les colonnes de la matrice M^{-1} inverse de M.

En résumé, pour calculer l'inverse d'une matrice carrée M d'ordre 3 de déterminant non nul, il suffit de résoudre le système (S) en prenant successivement pour second membre (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1).

EXEMPLE. *Calculer l'inverse de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons pour cela résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathrm{S}_1) \begin{cases} 3u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ 2u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{S}_2) \begin{cases} 3u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ 2u_1 - u_2 + u_3 = 1 \\ -u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{S}_3) \begin{cases} 3u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ 2u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 - 2u_3 = 1. \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent successivement

$$\begin{array}{lll} u_1 = 1/7, & u_2 = 3/7, & u_3 = 1/7, \\ u_1 = 3/7, & u_2 = -5/7, & u_3 = -4/7, \\ u_1 = 2/7, & u_2 = -1/7, & u_3 = -5/7. \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le lecteur vérifiera à titre d'exercice que

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I_3,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & -5 & -1\\ 1 & -4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

et que

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & -5 & -1\\ 1 & -4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Règle pratique. Pour calculer l'inverse $M^{-1}=(\beta_{ij})$ d'une matrice carrée $M=(\alpha_{ij})$ d'ordre 3 et de déterminant Δ non nul,
— on écrit la transposée ${}^tM=(\gamma_{ij})$;
— on supprime la i-ième ligne et la j-ième colonne;
— on calcule le déterminant de la matrice d'ordre 2 ainsi obtenue;
— on multiplie ce déterminant par 1 si $i+j$ est pair, par -1 dans le cas contraire;
— le quotient par Δ de la valeur trouvée est égal à β_{ij}.

EXEMPLE. *Retrouver par ce procédé l'élément β_{23} lorsque*

$$M=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Ecrivons la transposée de M :

$${}^tM=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Supprimons la deuxième ligne et la troisième colonne; il reste

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

est égal à 1. Comme $i+j=2+3$ est impair, il convient de multiplier 1 par -1; divisons le résultat obtenu par $\Delta=7$. Finalement,

$$\beta_{23} = -1/7.$$

EXERCICES

Déterminants

Calculer les déterminants suivants :

8.1 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$ **8.2** $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix}$ **8.3** $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

8.4 $\begin{vmatrix} 112 & 97 \\ 127 & 110 \end{vmatrix}$ **8.5** $\begin{vmatrix} 66 & 106 \\ 41 & 66 \end{vmatrix}$ **8.6** $\begin{vmatrix} 92 & 74 \\ 72 & 59 \end{vmatrix}$

8.7 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix}$ **8.8** $\begin{vmatrix} 7 & 30 & 37 \\ 10 & 38 & 50 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$ **8.9** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

8.10 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **8.11** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ **8.12** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

8.13 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **8.14** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **8.15** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

8.16 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -7 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **8.17** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \\ 11 & -5 & -12 \end{vmatrix}$ **8.18** $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 14 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes suivants :

8.19 $\begin{cases} 5x-4y = 19 \\ 6x+5y = 13 \end{cases}$ **8.20** $\begin{cases} 7x+9y = 29 \\ 4x+5y = 16 \end{cases}$

8.21 $\begin{cases} 8x-6y = 6 \\ -12x+9y = 9 \end{cases}$ **8.22** $\begin{cases} 13x-3y = 3 \\ 2x+4y = -4 \end{cases}$

8.23 $\begin{cases} 8x+\ y = -4 \\ 5x-2y = -13 \end{cases}$ **8.24** $\begin{cases} 6x+3y = 4 \\ x+y/2 = -2 \end{cases}$

8.25 $\begin{cases} ax+by = a^2+b^2 \\ -bx+ay = 0 \end{cases}$ **8.26** $\begin{cases} 6x-3y = 3 \\ 8x+2y = 10 \end{cases}$

8.27 $\begin{cases} 2x-5y = 9 \\ 5x-2y = 12 \end{cases}$

8.28 $\begin{cases} 5x-10y = 1 \\ 3x-\ 6y = 3 \end{cases}$

8.29 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{2x-5}{2} \\[2ex] \dfrac{x-2y}{4} = \dfrac{y+5}{3} \end{cases}$

8.30 $\begin{cases} \dfrac{3}{x-5} - \dfrac{4}{y+1} = \dfrac{7}{2} \\[2ex] \dfrac{2}{x-5} + \dfrac{3}{y+1} = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants :

8.31 $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ 5x+4y+3z = 0 \\ 6x+3y+2z = 1 \end{cases}$

8.32 $\begin{cases} x+2y+z = 2 \\ 2x+y+z = -1 \\ x-3y+2z = -1 \end{cases}$

8.33 $\begin{cases} 5x-4y-2z = 2 \\ x+y+z = -1 \\ 3x-2y-z = 1 \end{cases}$

8.34 $\begin{cases} 4x+2y = 4 \\ 2x+5y+4z = 2 \\ 2x-4y+3z = -6 \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants (a, b, c étant trois réels donnés)

8.35 $\begin{cases} 3x+2y+6z = a \\ x+y+2z = b \\ 2x+2y+5z = c \end{cases}$

8.36 $\begin{cases} x+2y-2z = a \\ -x+3y = b \\ -2y+z = c \end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants :

8.37 $\begin{cases} 2x+y-9z = -1 \\ x-y+3z = 1 \end{cases}$

8.38 $\begin{cases} 5x-y-z = -1 \\ x+y-5z = -11 \end{cases}$

8.39 $\begin{cases} x+y+z = 3 \\ -2x+y-4z = -6 \end{cases}$

8.40 $\begin{cases} 7x+4y-z = 3 \\ 6x-2y+z = -1 \end{cases}$

Inverses de matrices

Calculer les inverses des matrices suivantes (lorsqu'ils existent) :

8.41 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

8.42 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

8.43 $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

8.44 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

8.45 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

8.46 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

8.47 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.48 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8.49 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

8.50 $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **8.51** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **8.52** $\begin{pmatrix} j & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2j & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8.53 Trouver les matrices carrées B d'ordre 3 telles que

$A = BC$

dans les deux cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

CHAPITRE 9

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

9.1 Anneau des polynômes. Rappelons que les suites de nombres réels, munies de l'addition et de la multiplication externe, constituent un espace vectoriel sur **R**.

L'ensemble E des suites de nombres réels nuls à partir d'un certain rang est un sous-espace de l'espace vectoriel précédent.

L'ensemble E est non vide, puisqu'il contient la suite nulle (dont tous les termes sont nuls). Considérons maintenant deux suites (α_n) et (β_n) de nombres réels nuls à partir d'un certain rang, et deux nombres réels λ et μ. Il est clair que la suite de terme général $\lambda\alpha_n + \mu\beta_n$ a ses termes nuls à partir d'un certain rang; cette suite appartient donc à E.

Les suites $e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 0, 1, \dots, 0, \dots), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, \dots) \dots$, *constituent une base de l'espace vectoriel E, dite* canonique.

Ces suites constituent une famille génératrice : en effet, toute suite (α_n) de nombres réels nuls à partir d'un certain rang peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_0(1, 0, 0, \dots, 0, \dots) + \alpha_1(0, 1, 0, \dots, 0, \dots) + \alpha_2(0, 0, 1, \dots, 0, \dots) + \\ + \dots + \alpha_n(0, 0, 0, \dots, 1, \dots) + \dots = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \dots$$

Ces suites constituent une famille libre : en effet, par définition des lois sur E, la suite

$$\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \dots$$

est la suite nulle si et seulement si

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \dots = 0.$$

Il existe une application bilinéaire et une seule de $E \times E$ dans E qui, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, associe au couple (e_p, e_q) l'élément e_{p+q} de la base canonique de E :

$$(e_p, e_q) \mapsto e_{p+q}.$$

Cette loi de composition interne associe aux suites (α_n) et (β_n) la suite (γ_n), où

$$\gamma_n = \sum_{p+q=n} \alpha_p \beta_q = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_p \beta_{n-p} + \dots + \alpha_n \beta_0. \qquad (1)$$

Vérifions que la suite (γ_n) appartient encore à E : en effet, si α_n est nul dès que n est supérieur à p_0, et si β_n est nul dès que n est supérieur à q_0, alors γ_n est nul dès que n est supérieur à $p_0 + q_0 - 1$.

La loi de composition ainsi définie s'appelle *multiplication interne.*

Exemple. Les suites $(0, 1, -1, 2, 0, 0, 0, \dots)$ et $(1, 1/2, 0, -2, 0, 0, \dots)$ ont pour somme $(1, 3/2, -1, 0, 0, 0, \dots)$ et pour produit $(0, 1, -1/2, 3/2, -1, 2, -4, 0, 0, 0, \dots)$.

Muni de l'addition et de la multiplication interne, E est un anneau commutatif unitaire.

Un élément $P = (\alpha_n)$ de E s'appelle *polynôme*, et les nombres réels α_n s'appellent coefficients de P.

On appelle *monôme* un polynôme dont tous les coefficients sauf au plus un sont nuls.

L'anneau E s'appelle anneau des polynômes à coefficients réels.

En fait, E, ayant même une structure d'espace vectoriel, est une algèbre associative, commutative et unitaire.

Nous savons déjà que E est un groupe commutatif pour l'addition. La multiplication, étant définie comme une application bilinéaire de $E \times E$ dans E, est distributive par rapport à l'addition; elle est visiblement commutative. Pour prouver l'associativité, il suffit de vérifier que, pour tout triplet $((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ d'éléments de E, les termes généraux des suites $[(\alpha_n) . (\beta_n)] . (\gamma_n)$ et $(\alpha_n) . [(\beta_n) . (\gamma_n)]$ sont tous deux égaux à

$$\sum_{p+q+r=n} \alpha_p \beta_q \gamma_r .$$

Enfin, il découle de la formule (1) que e_0 est élément unité.

L'application $\lambda \mapsto \lambda e_0$ est visiblement un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur une partie de E. On identifie donc le nombre réel λ et le monôme λe_0. On note alors 1 l'élément e_0.

La relation

$$e_p e_q = e_{p+q}$$

montre que, pour tout entier naturel n,

$$(e_1)^n = e_n$$

en convenant que $(e_1)^0 = e_0$. L'élément e_1 est souvent noté X, et appelé *indéterminée*. Avec cette notation,

$$e_n = X^n .$$

L'anneau E se note encore $\mathbf{R}[X]$. Un élément $P = (\alpha_n)$ de $\mathbf{R}[X]$ s'écrit alors sous la forme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n .$$

9.2 Degré d'un polynôme. On appelle degré d'un polynôme non nul

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n ,$$

et on note $d^\circ(P)$, le plus grand des entiers n tels que α_n soit non nul.

Alors P s'écrit sous la forme

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_p X^p ,$$

où $p = d^\circ(P)$.

Pour éviter des cas d'exception, on dit que le polynôme nul a pour degré $-\infty$, avec les trois conventions suivantes :

— tout entier naturel est strictement supérieur à $-\infty$;
— la somme de tout entier naturel et de $-\infty$ est égale à $-\infty$;
— la somme de $-\infty$ et de $-\infty$ est égale à $-\infty$.

EXEMPLE. Les polynômes $(0, 1, -1, 2, 0, 0, 0, \ldots)$, $(1, 1/2, 0, -2, 0, 0, \ldots)$, $(1, 3/2, -1, 0, 0, 0, \ldots)$ et $(0, 1, -1/2, 3/2, -1, 2, -4, 0, 0, 0, \ldots)$ se notent respectivement

$$X-X^2+2X^3, \qquad 1+\frac{X}{2}-2X^3, \qquad 1+\frac{3X}{2}-X^2$$

et

$$X-\frac{X^2}{2}+\frac{3X^3}{2}-X^4+2X^5-4X^6.$$

Degré d'une somme, degré d'un produit. Soient P et Q deux polynômes. Alors

$$d°(P+Q) \leqslant \sup[d°(P), d°(Q)], \tag{1}$$

avec égalité si $d°(P) \neq d°(Q)$;

$$d°(PQ) = d°(P)+d°(Q). \tag{2}$$

Les vérifications sont immédiates. On prendra simplement soin de distinguer le cas où l'un des polynômes P et Q est nul.

La relation (2) montre que si P et Q sont différents de 0, il en est de même de PQ. Il n'y a donc pas de diviseur de zéro dans l'anneau des polynômes.

Cette même relation montre que si $PQ = 1$, alors

$$d°(P) = d°(Q) = 0.$$

Réciproquement, il est clair que les polynômes de degré 0, c'est-à-dire les nombres réels non nuls, sont inversibles.

9.3 Valuation d'un polynôme. On appelle valuation d'un polynôme non nul

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n,$$

et on note $v_0(P)$, le plus petit des entiers n tels que α_n soit non nul.

Pour éviter des cas d'exception, on dit que le polynôme nul a pour valuation $+\infty$, avec les trois conventions suivantes :

— tout entier naturel est strictement inférieur à $+\infty$;

— la somme de tout entier naturel et de $+\infty$ est égale à $+\infty$; la somme de $+\infty$ et de $+\infty$ est égale à $+\infty$.

Valuation d'une somme, valuation d'un produit. Soient P et Q deux polynômes. Alors

$$v_0(P+Q) \geqslant \inf[v_0(P),\ v_0(Q)],$$

avec égalité si $v_0(P) \neq v_0(Q)$;

$$v_0(PQ) = v_0(P)+v_0(Q).$$

Ici aussi, les vérifications sont immédiates; il convient encore de distinguer le cas où l'un des polynômes P et Q est nul.

9.4 Divisibilité. On dit qu'un polynôme B divise un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que

$$A = QB.$$

On dit encore que A est divisible par B, ou que A est multiple de B.

EXEMPLES.

Le polynôme X^2-1 est divisible par $X-1$, puisque

$$X^2-1 = (X+1)(X-1).$$

Le polynôme X^3-1 est divisible par $X-1$, puisque

$$X^3-1 = (X^2+X+1)(X-1).$$

Soient plus généralement n un entier naturel non nul et a un nombre réel. Alors X^n-a^n est divisible par $X-a$; plus précisément,

$$X^n-a^n = (X^{n-1}+aX^{n-2}+\dots+a^{n-1})(X-a).$$

De même, $X^{2n+1}+a^{2n+1}$ est divisible par $X+a$, et

$$X^{2n+1}+a^{2n+1} = (X^{2n}-aX^{2n-1}+a^2X^{2n-2}-\dots-a^{2n-1}X+a^{2n})(X+a).$$

En revanche, $X^{2n}+a^{2n}$ n'est pas divisible par $X+a$ si a est différent de 0

Soient A et B deux polynômes non nuls tels que B divise A et que A divise B. Il existe donc deux polynômes Q et R tels que $A=BQ$ et $B=AR$. Il s'ensuit que $A=AQR$ et donc que Q et R sont des polynômes inversibles, c'est-à-dire des nombres réels non nuls. Réciproquement, il est immédiat que, pour tout polynôme non nul A et pour tout nombre réel non nul α, A divise αA et αA divise A. Ainsi, la relation de divisibilité n'est pas antisymétrique. C'est pourquoi on introduit la définition suivante :

On appelle *coefficient dominant* d'un polynôme non nul le coefficient de son monôme de plus haut degré.

On dit qu'un polynôme est *unitaire* s'il est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.

On vérifie aisément que, dans l'ensemble des polynômes unitaires, la relation de divisibilité est une relation d'ordre.

9.5 Division euclidienne des polynômes. Soient A et B deux polynômes, B étant non nul. Il existe alors un couple (Q, R) et un seul de polynômes tel que

$$A = BQ+R, \qquad d^\circ(R) < d^\circ(B).$$

Les polynômes Q et R s'appellent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de A par B.

Unicité. Soit (Q', R') un second couple de polynômes tel que $A = BQ'+R'$ et $d^\circ(R') < d^\circ(B)$. Il en résulte que

$$B(Q-Q') = R'-R;$$

d'où la relation

$$d^\circ(R'-R) = d^\circ(B) + d^\circ(Q'-Q). \tag{1}$$

Nous savons d'autre part que $d^\circ(R'-R) \leqslant \sup[d^\circ(R), d^\circ(R')]$; donc

$$d^\circ(R'-R) < d^\circ(B). \tag{2}$$

Des relations (1) et (2) nous déduisons que

$$d^\circ(B) + d^\circ(Q-Q') < d^\circ(B).$$

Comme B n'est pas nul, cette dernière relation entraîne $Q = Q'$, et enfin $R=R'$.

Existence. La démonstration s'effectue par récurrence sur le degré de A; elle fournit une méthode pratique d'obtention de Q et de R.

Lorsque $d^\circ(A) < d^\circ(B)$, le couple $(0, A)$ convient visiblement. Supposons l'existence du couple (Q, R) établie pour tous les polynômes de degré strictement inférieur à n, où n est un entier supérieur à $d^\circ(B)$, et considérons un polynôme A de degré n. Écrivons A et B sous la forme suivante :

$$A = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0, \qquad \alpha_n \neq 0,$$
$$B = \beta_p X^p + \beta_{p-1} X^{p-1} + \dots + \beta_0, \qquad \beta_p \neq 0.$$

Comme $n \geqslant p$, nous pouvons introduire le polynôme

$$A_1 = A - \frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p} B.$$

Ce polynôme est de degré strictement inférieur à n. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à A_1 : il existe un couple (Q_1, R_1) de polynômes tel que

$$A_1 = BQ_1+R_1, \qquad d^\circ(R_1) < d^\circ(B).$$

Il en résulte que

$$A = B\left(Q_1 + \frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p}\right) + R_1 ;$$

le couple $\left(Q_1 + \frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p}, R_1\right)$ convient.

On notera que si $R = 0$, A est divisible par B; réciproquement, si A est divisible par B, l'unicité du reste montre que $R = 0$.

Pratique de la division euclidienne. La pratique de la division s'en déduit :

— On ordonne les polynômes A et B suivant les puissances décroissantes, on place A au dividende, en laissant des vides pour les degrés manquants, et on place B au diviseur.

— Le premier terme du quotient est $\frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p}$.

— On écrit le polynôme $\frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p} B$ en dessous du polynôme A, et on le retranche de A ; on obtient ainsi A_1.

— On répète ces opérations jusqu'à l'obtention au dividende d'un polynôme de degré strictement inférieur au degré de B; ce polynôme est le reste R, tandis que Q est écrit à l'emplacement traditionnel du quotient.

Exemple. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 + 1$ par $X^2 + X + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 \qquad\qquad\quad +1 & X^2+X+1 \\
\underline{X^4+X^3+X^2 \qquad\quad} & \overline{X^2-X} \\
-X^3-X^2 \quad +1 & \\
\underline{-X^3-X^2-X \quad} & \\
X+1 &
\end{array}
$$

Le quotient est donc $X^2 - X$, et le reste $X + 1$.

9.6 Structure des idéaux de l'anneau des polynômes. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal non réduit à $\{0\}$ de l'anneau $\mathbf{R}[X]$. Il existe un polynôme unitaire D et un seul appartenant à $\mathfrak{J}$ tel que $\mathfrak{J}$ soit l'ensemble des multiples de D.

Puisque $\mathfrak{J}$ n'est pas réduit au polynôme nul, l'ensemble des degrés des éléments non nuls de $\mathfrak{J}$ est une partie non vide de N. Soient n_0 son plus petit élément, P_0 un élément de $\mathfrak{J}$ de degré n_0 et α le coefficient dominant de P_0. Le polynôme $D = \frac{1}{\alpha} P_0$ appartient encore à $\mathfrak{J}$, et $d^\circ(D) = n_0$. Considérons un élément A de $\mathfrak{J}$, la division euclidienne de A par D :

$$A = DQ + R, \ d^\circ(R) < n_0.$$

Puisque D appartient à $\mathfrak{J}$, il en est de même de DQ, et aussi de $R = A - DQ$, car $\mathfrak{J}$ est un idéal. La relation $d^\circ(R) < n_0$ montre alors que $R = 0$, par définition de n_0. Réciproquement, nous savons que tout polynôme de la forme DQ appartient à $\mathfrak{J}$.

Enfin, soit D' un polynôme unitaire appartenant à $\mathfrak{J}$, tel que $\mathfrak{J}$ soit l'ensemble des multiples de D'. Alors D est un multiple de D'. Comme $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des multiples de D, D' est un multiple de D. L'antisymétrie de la relation de divisibilité dans l'ensemble des polynômes unitaires implique que $D' = D$.

EXEMPLE. Soient A et B deux polynômes et $\mathfrak{J}$ l'ensemble des polynômes de la forme

$$AU+BV,$$

U et V étant deux polynômes. Il est clair que $\mathfrak{J}$ est un idéal. Si A et B ne sont pas nuls, $\mathfrak{J}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. D'après le théorème précédent, il existe un polynôme unitaire D unique tel que $\mathfrak{J}$ soit l'ensemble des multiples de D.

Or, $A \in \mathfrak{J} \quad (U=1,\ V=0)$,

et $B \in \mathfrak{J} \quad (U=0,\ V=1)$;

donc A et B sont des multiples de D; ou encore, D est un diviseur de A et B. Mais tout diviseur commun à A et B divise, quels que soient U et V, le polynôme $AU+BV$, c'est-à-dire tout élément de $\mathfrak{J}$, et D en particulier.

Ainsi :

— D est un diviseur commun à A et B,
— tout diviseur commun à A et B divise D.

Pour ces raisons D est appelé plus grand commun diviseur de A et B (en abrégé : P.G.C.D.).

Si $D = 1$, les polynômes A et B ont pour seuls diviseurs communs des constantes : on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Ainsi, pour que deux polynômes A et B soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes U et V tels que

$$AU+BV = 1.$$

Ce résultat est connu sous le nom d'égalité de Bézout.

Application de l'égalité de Bézout.

La formule de Bézout permet de démontrer très simplement un théorème dont nous aurons l'usage dans l'étude des fractions rationnelles.

Soient A, B, C trois polynômes. Si A est premier avec B et s'il divise le produit BC, alors il divise C.

En effet, si A est premier avec B, il existe deux polynômes U et V tels que

$$AU+BV = 1.$$

On en déduit

$$ACU+BCV = C.$$

Or, A divise AC, et BC (par hypothèse). Il divise donc ACU et BCV, et donc aussi leur somme C.

9.7 Division suivant les puissances croissantes. Soient n un entier naturel, A et B deux polynômes, la valuation de B étant nulle. Il existe alors un couple (Q, R) et un seul de polynômes tel que

$$A = BQ+X^{n+1}R, \qquad d°(Q) \leqslant n.$$

Les polynômes Q et R s'appellent respectivement quotient et reste à l'ordre n de la division de A par B suivant les puissances croissantes.

Unicité. Soit (Q', R') un second couple de polynômes tel que $A = BQ'+ X^{n+1}R'$ et $d°(Q') \leqslant n$. Il en résulte que $B(Q-Q') = X^{n+1}(R'-R$; d'où la relation

$$v_0(B)+v_0(Q-Q') = n+1+v_0(R'-R).$$

Comme $v_0(B)=0$, cela implique que $v_0(Q-Q') \geqslant n+1$, ce qui impose $Q'=Q$ (dans le cas contraire, $v_0(Q-Q') \leqslant d°(Q-Q') \leqslant n$). Ainsi, $X^{n+1}R = X^{n+1}R'$, et enfin $R=R'$, puisqu'il n'y a pas de diviseur de zéro dans l'anneau des polynômes.

Existence. La démonstration s'effectue par récurrence descendante sur la valuation de A; elle fournit une méthode pratique d'obtention de Q et de R.

Lorsque $v_0(A) \geqslant n+1$, écrivons A sous la forme $A = X^{n+1}C$; le couple $(0, C)$ convient visiblement. Supposons l'existence du couple (Q, R) établie pour tous les polynômes de valuation strictement supérieure à p, où p est un entier naturel inférieur à n, et considérons un polynôme A de valuation p. Écrivons A et B sous la forme suivante :

$$A = \alpha_p X^p + \alpha_{p+1}X^{p+1} + \ldots + \alpha_q X^q, \qquad \alpha_p \neq 0,$$
$$B = \beta_0+\beta_1 X + \ldots + \beta_r X^r, \qquad \beta_0 \neq 0.$$

La valuation du polynôme $A_1 = A - \dfrac{\alpha_p}{\beta_0} X^p B$ est strictement supérieure à p.

L'hypothèse de récurrence s'applique donc à A_1 : il existe un couple (Q_1, R_1) de polynômes tel que

$$A_1 = BQ_1 + X^{n+1}R_1, \qquad d°(Q_1) \leqslant n.$$

Il en résulte que

$$A = B\left(Q_1 + \frac{\alpha_p}{\beta_0} X^p\right) + X^{n+1}R_1 ;$$

le couple $\left(Q_1 + \dfrac{\alpha_p}{\beta_0} X^p, R_1\right)$ convient.

Pratique de la division suivant les puissances croissantes. La pratique de la division s'en déduit :

— On ordonne les polynômes A et B suivant les puissances croissantes, on place A au dividende, en laissant des vides pour les degrés manquants, et on place B au diviseur.

— Le premier terme du quotient est $\dfrac{\alpha_p}{\beta_0} X^p$.

— On écrit le polynôme $\dfrac{\alpha_p}{\beta_0} X^p B$ en dessous du polynôme A, et on le retranche de A; on obtient ainsi A_1.

— On répète ces opérations jusqu'à l'obtention au dividende d'un polynôme de valuation strictement supérieure à n ; mettant X^{n+1} en facteur dans ce polynôme, on obtient le reste à l'ordre n, tandis que le quotient est écrit à son emplacement traditionnel.

EXEMPLE. Calculer le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de $1+X$ par $1+X+X^2$.

$$
\begin{array}{l|l}
1+X & 1+X+X^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1+X+X^2} & 1-X^2+X^3 \\
\quad -X^2 & \\
\quad \underline{-X^2-X^3-X^4} & \\
\qquad\quad X^3+X^4 & \\
\qquad\quad \underline{X^3+X^4+X^5} & \\
\qquad\qquad\quad -X^5 &
\end{array}
$$

Le quotient est donc $1-X^2+X^3$, et le reste -1.

On remarquera que la théorie précédente s'étend immédiatement au cas des nombres complexes : les suites de nombres complexes constituent un espace vectoriel sur **C**, les suites de nombres complexes nuls à partir d'un certain rang constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel précédent. La multiplication étant toujours définie par la formule (1), l'ensemble des suites de nombres complexes nuls à partir d'un certain rang est muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire. Cet anneau est appelé *anneau des polynômes à coefficients complexes*, et noté $\mathbf{C}[X]$.

Un polynôme à coefficients complexes se note

$$\alpha_0+\alpha_1 X+\alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_p X^p,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont cette fois des nombres complexes.

9.8 Fonctions polynomiales. Soit

$$P = \alpha_0+\alpha_1 X+\alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_p X^p$$

un polynôme à coefficients réels. On appelle *fonction polynomiale* associée à P, et on note (abusivement) P, l'application de **R** dans **R** qui à tout nombre réel x associe le nombre réel

$$\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p .$$

Ce nombre réel s'appelle valeur de P au point x, et se note $P(x)$.

On définit de même, pour tout polynôme P à coefficients complexes, la fonction polynomiale associée à P, application de **C** dans **C**.

Si le polynôme P est de degré strictement inférieur à 1, c'est-à-dire si P est de la forme α_0, la fonction polynomiale associée à P est constante, et son image est réduite à α_0. On dit alors que P est un *polynôme constant.*

On dit qu'un nombre réel a est une racine d'un polynôme P si la valeur $P(a)$ de P au point a est égale à 0.

On peut caractériser simplement les racines d'un polynôme; en effet, pour qu'un nombre réel a soit une racine d'un polynôme P, il faut et il suffit que P soit divisible par $X-a$.

En effet, considérons la division euclidienne de P par $X-a$:

$$P = (X-a)\, Q+R, \quad d^\circ(R) < 1 .$$

Le reste est constant, et évidemment égal à $P(a)$. Or, P est divisible par $X-a$ si et seulement si $R=0$. L'assertion en résulte.

On appelle *multiplicité* d'une racine a d'un polynôme non nul P le plus grand des entiers naturels q tels que $(X-a)^q$ divise P. La multiplicité m de a est donc un entier naturel non nul et inférieur au degré de P. Lorsque $m=1$, on dit que la racine a est simple; lorsque $m>1$, on dit qu'elle est multiple. En particulier, si $m=2$ (resp. $m=3$), on dit que la racine a est double (resp. triple).

9.9 Recherche pratique de la valeur d'un polynôme en un point. La substitution du nombre réel a à l'indéterminée X dans le polynôme P n'est pas la méthode la plus commode pour calculer la valeur de P au point a.

Nous savons qu'il existe un polynôme Q et un seul tel que

$$P = (X-a)\; Q+P(a) .$$

L'identification de P à $(X-a)\; Q+P(a)$ fournit à la fois le polynôme Q et la valeur de P au point a.

En effet, si le polynôme P est de degré p, le polynôme Q est de degré $p-1$, et

$$\begin{aligned}\alpha_p X^p+\alpha_{p-1} X^{p-1}+\alpha_{p-2} X^{p-2} + \dots + \alpha_0 &= \\ = (X-a)\,(\beta_{p-1} X^{p-1}+\beta_{p-2} X^{p-2} &+ \dots + \beta_0) + P(a) .\end{aligned}$$

Les monômes $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$ constituant une base de l'espace vectoriel des polynômes, les coefficients des termes de même degré de chaque membre sont égaux, et

$$\begin{aligned}
\alpha_p &= \beta_{p-1}\\
\alpha_{p-1} &= \beta_{p-2}-a\beta_{p-1}\\
&\dots\dots\dots\\
\alpha_n &= \beta_{n-1}-a\beta_n\\
&\dots\dots\dots\\
\alpha_1 &= \beta_0-a\beta_1\\
\alpha_0 &= P(a)-a\beta_0.
\end{aligned}$$

On en déduit inversement

$$\begin{aligned}
\beta_{p-1} &= \alpha_p\\
\beta_{p-2} &= \alpha_{p-1}+a\beta_{p-1}\\
&\dots\dots\dots\\
\beta_{n-1} &= \alpha_n+a\beta_n\\
&\dots\dots\dots\\
\beta_0 &= \alpha_1+\alpha\beta_1\\
P(a) &= \alpha_0+a\beta_0.
\end{aligned}$$

EXEMPLE. *Calculer la valeur de*

$$2X^7-3X^6+2X^5-7X^4-4X^3+2X^2+8X-9$$

au point -3.

L'algorithme précédent conduit à

$$\begin{aligned}
\beta_6 &= \alpha_7 = 2\\
\beta_5 &= \alpha_6+a\beta_6 = -3-3\times 2 = -9\\
\beta_4 &= \alpha_5+a\beta_5 = 2+3\times 9 = 29\\
\beta_3 &= \alpha_4+a\beta_4 = -7-3\times 29 = -94\\
\beta_2 &= \alpha_3+a\beta_3 = -4+3\times 94 = 278\\
\beta_1 &= \alpha_2+a\beta_2 = 2-3\times 278 = -832\\
\beta_0 &= \alpha_1+a\beta_1 = 8+3\times 832 = 2504\\
P(a) &= \alpha_0+a\beta_0 = -9-3\times 2504 = -7521.
\end{aligned}$$

Un calcul direct aurait exigé le calcul des puissances successives de -3 jusqu'à la puissance septième; d'où treize multiplications, au lieu de sept avec la présente méthode.

On démontre qu'un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

Il s'ensuit que l'application qui à tout polynôme P associe la fonction polynomiale

$$f: x \mapsto P(x)$$

est injective.

Soient en effet P et Q deux polynômes ayant même fonction polynomiale associée f. Supposons par l'absurde $P-Q \neq 0$. La fonction polynomiale associée à $P-Q$, à savoir $f-f=0$, aurait un nombre fini de racines, ce qui est contradictoire.

Nous avons vu au chapitre 4 que tout polynôme de degré 2 à coefficients réels ou complexes admet deux racines, ou une racine double, sur le corps des complexes.
Voici un résultat fondamental, que nous admettrons :

Théorème de D'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbf{C}$.
Autrement dit, pour tout polynôme P non constant à coefficients complexes, il existe un nombre complexe a tel que $P(a)=0$.
On en déduit aussitôt que la somme des multiplicités des racines de P est égale au degré de P. Par exemple, un polynôme de degré 3 admet soit trois racines simples, soit une racine simple et une racine double, soit une racine triple.

9.10 Racines rationnelles. Le théorème de D'Alembert-Gauss nous affirme l'existence d'au moins une racine dans $\mathbf{C}$ pour tout polynôme non constant à coefficients complexes, mais il ne nous donne pas cette racine : en fait, il n'existe aucune méthode générale de résolution lorsque le degré du polynôme est au moins 5.
Toutefois, si un polynôme à coefficients rationnels (ou, ce qui revient au même, entiers) admet des racines rationnelles, des considérations très simples d'arithmétique permettent de les déterminer.
Soit par exemple le polynôme

$$324X^4-567X^3+486X^2-243X-112,$$

et supposons qu'il admette une racine rationnelle, que nous exprimons sous la forme p/q d'une fraction irréductible.
On aurait

$$324\,\frac{p^4}{q^4}-567\,\frac{p^3}{q^3}+486\,\frac{p^2}{q^2}-243\,\frac{p}{q}-112=0,$$

ou encore

$$324p^4-567p^3q+486p^2q^2-243pq^3-112q^4=0,$$

et l'on peut alors remarquer que :

a) p divise les 4 premiers termes, donc leur somme, donc $112q^4$.
Mais p et q sont premiers entre eux, donc p divise 112.

b) q divise les 4 derniers termes, donc leur somme, donc $324p^4$.
Mais q et p sont premiers entre eux, donc q divise 324.

C'est la remarque fondamentale :

Si p/q (irréductible) est racine d'un polynôme à coefficients entiers, p divise le coefficient du terme de plus bas degré, q divise le coefficient du terme de plus haut degré.

Dans l'exemple étudié :

p doit être un diviseur de $112 = 2^4 \times 7$;

q doit être un diviseur de $324 = 2^2 \times 3^4$.

Par essais successifs, on trouve que 2/3 est la seule racine rationnelle du polynôme donné.

On réduit le nombre des essais grâce à la règle d'exclusion suivante :

$p - q$ doit diviser $f(1)$

$p + q$ doit diviser $f(-1)$.

Remarque. Soit un polynôme à coefficients entiers et dont le premier et le dernier coefficients sont égaux à 1, ou -1, par exemple

$$X^7 - 214X^6 + 612X^2 - 4X - 1 .$$

D'après la remarque ci-dessus, si ce polynôme a une racine rationnelle, son numérateur divise -1, et son dénominateur divise 1. Les racines rationnelles d'un tel polynôme ne peuvent être que 1 ou -1 (dans le cas particulier, on voit que ni 1, ni -1 ne sont racines : ce polynôme n'a donc aucune racine rationnelle).

9.11 Dérivées. Soit un polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \qquad (n \geqslant 1).$$

Par définition, le polynôme

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \dots + na_n X^{n-1}$$

est appelé *dérivée* de P. On pose en outre, si $P = a$, $P' = 0$.

L'application $P \mapsto P'$ de E dans E est manifestement linéaire : on vérifie immédiatement les égalités

$$(\lambda P)' = \lambda P',$$

$$(P+Q)' = P' + Q'.$$

Enfin, on établit la formule

$$(PQ)' = P'Q + PQ'.$$

A cause de la linéarité, il suffit d'établir cette formule dans les cas particuliers

$$P = X^n, \qquad Q = X^p,$$

alors $\quad P' = nX^{n-1}, \qquad Q' = pX^{p-1},$

tandis que

$$PQ = X^{n+p} \quad \text{et} \quad (PQ)' = (n+p)X^{n+p-1}.$$

La vérification est alors immédiate.

Remarque. La fonction polynomiale associée à la dérivée P' d'un polynôme P est la dérivée (au sens usuel de l'analyse) de la fonction polynomiale associée à P. Mais l'intérêt est qu'ici nous faisons une étude purement algébrique (c'est-à-dire sans utiliser la notion de limite !).

9.12 Dérivées successives. On définit par récurrence la dérivée $P^{(n)}$ d'ordre n du polynôme P en posant

$$P^{(n)} = (P^{(n-1)})'.$$

Il est clair que l'application $P \mapsto P^{(n)}$ est encore une application linéaire de l'algèbre E dans elle-même.

En outre si P a un degré au plus égal à $n-1$, alors $P^{(n)} = 0$. Pour calculer les dérivées successives d'un produit, on peut utiliser la formule de Leibniz

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j P^{(j)} Q^{(n-j)}.$$

La démonstration en est aisée par récurrence sur n : la formule est connue pour $n = 1$. Admettons la formule

$$(PQ)^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j P^{(j)} Q^{(n-1-j)}.$$

Dérivons en utilisant dans chaque terme de la somme la formule pour dériver un produit :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j [P^{(j+1)} Q^{(n-1-j)} + P^{(j)} Q^{(n-j)}] ;$$

utilisons la formule

$$C_{n-1}^j + C_{n-1}^{j-1} = C_n^j,$$

et regroupons deux à deux les termes analogues; il vient

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j P^{(j)} Q^{(n-j)}.$$

9.13 Formule de Taylor. D'après le nº 9.1, les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$ constituent une base de l'espace vectoriel des polynômes.

Soit maintenant p un entier naturel. Les polynômes de degré inférieur à p constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynômes, à savoir le sous-espace vectoriel E_p engendré par les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^p$ (cette fois, sans points de suspension). La dimension de E_p est évidemment $p+1$.

Soit enfin a un nombre réel. On démontre facilement que les monômes $1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^p$ sont linéairement indépendants. Étant au nombre de $p+1$, ils constituent une base de E_p (voir nº 6.2). Tout élément P de E_p s'écrit donc d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$P = \beta_0 + \beta_1(X-a) + \beta_2(X-a)^2 + \ldots + \beta_p(X-a)^p. \tag{1}$$

Il reste à calculer les coefficients $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. A cet effet, remplaçons d'abord X par a. Nous obtenons aussitôt $\beta_0 = P(a)$. Dérivons ensuite les deux membres de (1) :

$$P' = \beta_1 + 2\beta_2(X-a) + \ldots + p\beta_p(X-a)^{p-1}.$$

En remplaçant de nouveau X par a, nous obtenons $\beta_1 = P'(a)$. En dérivant encore les deux membres de (1), nous trouvons

$$P'' = 2\beta_2 + \ldots + p(p-1)\,\beta_p(X-a)^{p-2}$$

et

$$\beta_2 = \frac{P''(a)}{2}.$$

On calcule de même les autres coefficients :

$$\beta_3 = \frac{P'''(a)}{6}, \qquad \beta_4 = \frac{P^{(4)}(a)}{24}, \ldots, \beta_p = \frac{P^{(p)}(a)}{p!}.$$

En résumé

$$P = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(X-a)^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{P^{(p)}(a)}{p!}(X-a)^p.$$

C'est la *formule de Taylor*, permettant de passer d'une base de E_p à l'autre.

Si $a = 0$, cette formule prend le nom de *formule de Maclaurin*, et se réduit à

$$P = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}X + \frac{P''(0)}{2!}X^2 + \ldots + \frac{P^{(p)}(0)}{p!}X^p.$$

EXEMPLE. Prenons $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ et $a = 1$. Alors $p = 5$ et

$$\begin{array}{llll}
P(1) & = 0 & & \\
P' & = 5X^4 - 8X^3 + 3X^2 - 2X + 2 & P'(1) & = 0 \\
P'' & = 20X^3 - 24X^2 + 6X - 2 & P''(1) & = 0 \\
P''' & = 60X^2 - 48X + 6 & P'''(1) & = 18 \\
P^{(4)} & = 120X - 48 & P^{(4)}(1) & = 72 \\
P^{(5)} & = 120 & P^{(5)}(1) & = 120.
\end{array}$$

La formule de Taylor s'écrit donc

$$\begin{aligned}
P &= \frac{18}{3!}(X-1)^3 + \frac{72}{4!}(X-1)^4 + \frac{120}{5!}(X-1)^5 \\
&= 3(X-1)^3 + 3(X-1)^4 + (X-1)^5.
\end{aligned}$$

FRACTIONS RATIONNELLES

9.14 Fractions rationnelles. Nous avons vu que l'anneau $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients réels est un anneau commutatif unitaire sans diviseur de zéro. Cet anneau n'est pas un corps, puisque seuls les polynômes de degré 0 sont inversibles.

Nous nous proposons de construire un corps dont une partie soit isomorphe à l'anneau des polynômes à coefficients réels. (Le cas des coefficients complexes se traite exactement de la même manière.)

La construction est absolument analogue à la construction bien connue du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels à partir de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels : on définit des classes d'équivalence dans l'ensemble des couples (P, Q) de polynômes (Q non nul) par la relation $\mathscr{R}$

$$(P, Q) \sim (P', Q') \qquad \text{si} \qquad PQ' = P'Q$$

et on montre que l'ensemble de classes ainsi obtenu peut être constitué en un corps commutatif $\mathbf{R}(X)$, appelé corps des fractions rationnelles :

Muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble quotient $(\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]^*)/\mathscr{R}$ est un corps commutatif, appelé *corps des fractions rationnelles*, et noté $\mathbf{R}(X)$.

L'élément neutre pour l'addition est la classe de $(0, 1)$, l'élément unité pour la multiplication est la classe de $(1, 1)$.

De plus, l'application qui à tout polynôme P associe la classe de $(P, 1)$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathbf{R}[X]$ sur une partie de $\mathbf{R}(X)$.

On identifie un polynôme P et la classe de $(P, 1)$. La classe de (P, Q) se note P/Q; la relation

$$(P, Q)\, \mathscr{R}(P', Q')$$

se note alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}.$$

EXEMPLES.

1. Le couple $(X^2-1,\ X-1)$ est équivalent au couple $(X+1, 1)$; la fraction rationnelle

$$\frac{X^2-1}{X-1}$$

est donc égale au polynôme $X+1$.

2. Le couple (X^2-1, X^5-1) est équivalent au couple $(X+1, X^4+X^3+X^2+X+1)$; nous pouvons ainsi écrire

$$\frac{X^2-1}{X^5-1} = \frac{X+1}{X^4+X^3+X^2+X+1}.$$

Des considérations de degré montrent que la fraction rationnelle

$$\frac{X^2-1}{X^5-1}$$

n'est pas égale à un polynôme.

9.15 Fonctions rationnelles. On dit qu'un nombre réel x est *substituable* dans une fraction rationnelle R s'il existe un élément (P, Q) de $\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]^*$ tel que $R = P/Q$ et que $Q(x)$ soit non nul.

Soit (P', Q') un autre élément de $\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]^*$ tel que $R = P'/Q'$ et que $Q'(x)$ soit non nul. Alors

$$PQ' = P'Q,$$

et

$$P(x)\,Q'(x) = P'(x)\,Q(x).$$

D'où

$$\frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Le nombre réel $P(x)/Q(x)$ ne dépend donc pas du représentant (P, Q) considéré; on l'appelle valeur de R au point x, et on le note $R(x)$.

Soient maintenant R un élément de $\mathbf{R}(X)$ et A l'ensemble des nombres réels substituables dans R. L'application de A dans $\mathbf{R}$ qui à tout élément x de A associe la valeur de R au point x s'appelle fonction rationnelle associée à la fraction rationnelle R.

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, Q étant non nul; on suppose que P et Q n'ont aucune racine commune. L'ensemble A des nombres réels substituables dans $R = P/Q$ est évidemment le complémentaire dans $\mathbf{R}$ de l'ensemble des racines de Q.

La fonction rationnelle associée à R est donc l'application de A dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Les valeurs de x non substituables dans R (c'est-à-dire telles que $Q(x)$ soit nul) sont appelées *pôles* de la fraction rationnelle R.

EXEMPLES.

1. Soit

$$R = \frac{X^3 - 1}{(X^2 - 1)(X - 2)}$$

Tout nombre réel x différent de -1, de 1 et de 2 est évidemment substituable dans R.

Comme

$$\frac{X^3 - 1}{(X^2 - 1)(X - 2)} = \frac{X^2 + X + 1}{(X + 1)(X - 2)},$$

nous voyons que 1 est aussi substituable dans R, et que $R(1) = -3/2$.

2. Soient a, b, c et d quatre nombres réels, c étant non nul. La fonction rationnelle associée à la fraction rationnelle

$$\frac{aX+b}{cX+d}$$

est la fonction homographique

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

définie sur $A = \mathbf{R} - \{-d/c\}$.

9.16 Décomposition en éléments simples. Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : décomposer une fraction rationnelle en somme d'un polynôme et de fractions de numérateur constant et de dénominateur de la forme $(X-a)^n$, où a est un pôle, et n un entier strictement positif.

En prenant des polynômes à coefficients complexes, nous allons voir que ce problème admet une solution et une seule, et qu'il est possible d'expliciter une telle décomposition chaque fois que l'on connaît les pôles de la fraction considérée.

Nous allons d'abord séparer la partie polynôme, dite *partie entière*, de la fraction rationnelle R, écrite sous forme irréductible P/Q (c'est-à-dire Q unitaire, P et Q premiers entre eux).

R se met d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}$$

où E et P_1 sont des polynômes, le degré de P_1 étant strictement inférieur à celui de Q.

Multiplions en effet les deux membres par Q : $P = EQ + P_1$, $\text{d}^\circ(P_1) < \text{d}^\circ(Q)$; E et P_1 existent et sont uniques : E est le quotient, et P_1 le reste, de la division de P par Q suivant les puissances décroissantes.

Notons qu'il n'y a lieu de chercher la partie entière que si le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur : sinon, E est nul, et $P_1 = P$.

Dans la suite, nous pourrons donc nous borner à considérer des fractions rationnelles dont le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur.

Soit une fraction rationnelle sous forme irréductible, dont le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, celui-ci étant supposé écrit de la manière suivante : $Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_n$, les polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ étant unitaires et premiers entre eux deux à deux.

Il existe alors une suite $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de polynômes tels que l'on puisse écrire :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n : prenons d'abord $n = 2$. Les polynômes Q_1 et Q_2 étant premiers entre eux, il existe deux polynômes A et B tels que $AQ_1 + BQ_2 = 1$ (d'après l'égalité de Bézout). Multiplions les deux membres par P : $P = PAQ_1 + PBQ_2$. L'assertion est démontrée, en posant $P_1 = PB$, et $P_2 = PA$, car en divisant les deux membres par Q, nous obtenons

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Si l'assertion est établie pour $n-1$, démontrons-la pour le rang n. Il suffit d'écrire

$$Q = Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} Q_n = Q' Q_n ;$$

Q_n étant premier avec $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ l'est avec leur produit Q', et le résultat valable pour $n = 2$ conduit à

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} + \frac{P_n}{Q_n},$$

et comme Q' se compose de $n-1$ facteurs, l'hypothèse de récurrence s'applique à

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Si nous imposons aux polynômes P_i d'être de degré strictement inférieur à celui du polynôme Q_i correspondant, il existe alors une suite et une seule de polynômes P_i : montrons d'abord que cette condition sur les degrés des P_i peut être satisfaite. Partons de la décomposition précédente :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i}$$

et séparons la partie entière E_i de P_i/Q_i :

$$\frac{P_i}{Q_i} = E_i + \frac{P_i'}{Q_i},$$

avec $d°(P_i') < d°(Q_i)$. D'où :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{Q_i} + \sum_{i=1}^{n} E_i.$$

En réduisant au même dénominateur, nous voyons que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est la partie entière de P/Q, laquelle est nulle d'après l'hypothèse.

L'unicité de la suite des P_i' se vérifie en supposant par l'absurde qu'il existe une deuxième décomposition :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{Q_i}, \qquad d°(P_i) < d°(Q_i), \qquad d°(P_i') < d°(Q_i).$$

Les deux décompositions étant supposées distinctes, l'un au moins des P_i' est différent du P_i correspondant, soit, pour fixer les idées, $P_n' \neq P_n$.

Alors

$$\frac{P_n - P_n'}{Q_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_i' - P_i}{Q_i},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{P_n - P_n'}{Q_n} = \frac{P'}{Q'}, \qquad \text{avec} \qquad Q' = Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1}.$$

En égalant le produit des extrêmes et le produit des moyens, il vient : $Q'(P_n - P_n') = P' Q_n$. Le polynôme Q_n, étant premier avec Q', divise $(P_n - P_n')$, polynôme non nul de degré strictement inférieur à celui de Q_n. Cette contradiction montre l'unicité de la décomposition.

Or, pour des polynômes à coefficients *complexes*, il résulte du théorème de D'Alembert que *le dénominateur Q peut toujours s'écrire sous la forme*

$$Q = (X - a_1)^{n_1} (X - a_2)^{n_2} \dots (X - a_p)^{n_p} \qquad (Q \text{ étant supposé unitaire}).$$

Les polynômes $(X - a_i)^{n_i}$ sont unitaires et premiers entre eux deux à deux, et le théorème précédent s'applique. En pratique la décomposition d'une fraction rationnelle pourra donc se faire chaque fois qu'on en connaît les pôles.

Nous allons enfin expliciter les polynômes P_i : soit a un pôle d'ordre p. D'après le théorème précédent, nous savons qu'il existe un couple et un seul de polynômes P_1 et P_2, $d°(P_1) < p$, $d°(P_2) < d°(Q_2)$, tel que si

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)^p Q_2}, \qquad Q \text{ et } Q_2 \text{ unitaires},$$

alors

$$R = \frac{P_1}{(X-a)^p} + \frac{P_2}{Q_2} + E.$$

Il en résulte l'égalité

$$P = P_1 Q_2 + (X-a)^p (P_2 + Q_2 E),$$

avec $d°(P_1) < p$, ce qui montre que P_1 est le quotient de la division de P par Q_2 suivant les puissances croissantes de $Y = X - a$ à l'ordre $p - 1$.

Si nous ordonnons P_1 suivant les puissances croissantes de $Y = X - a$,

$$P_1 = b_p + b_{p-1}(X-a) + \dots + b_1 (X-a)^{p-1},$$

nous voyons que

$$\frac{P_1}{(X-a)^p} = \frac{b_p}{(X-a)^p} + \frac{b_{p-1}}{(X-a)^{p-1}} + \dots + \frac{b_1}{X-a},$$

et nous aurons une écriture analogue pour tous les pôles de R. Le coefficient b_1 s'appelle *résidu* relatif au pôle a.

La pratique de la décomposition se déduit aisément de la théorie ci-dessus :

1. On commence par calculer la partie entière, le cas échéant.

2. On cherche les pôles de R, et on écrit la décomposition de R *a priori*, à l'aide de coefficients indéterminés :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{\alpha_p}{(X-a)^p} + \dots + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\beta_q}{(X-b)^q} + \dots + \frac{\beta_1}{X-b} + \dots$$

3. Pour un pôle multiple d'ordre assez élevé, on applique la méthode théorique : on fait le changement de variable $Y = X-a$, et l'on procède à la division de P par le facteur de Y^p suivant les puissances croissantes à l'ordre $p-1$.

4. Pour un pôle simple, cela revient à multiplier les deux membres par $X-a$, et à substituer à X la valeur a; ainsi, $b_1 = P(a)/Q_2(a)$. Remarquons que b_1 est aussi donné par le quotient $P(a)/Q'(a)$, où $Q'(a)$ est la dérivée de Q au point a : cela résulte de la formule de Taylor

$$Q = (X-a)\, Q'(a) + \dots + \frac{(X-a)^n}{n!}\, Q^{(n)}(a).$$

5. Enfin, lorsqu'il ne reste à calculer que quelques coefficients, on peut les obtenir en substituant à X des valeurs particulières : 0, 1 ou j par exemple, si ces nombres ne sont pas des pôles.

Voici un exemple rassemblant les principales difficultés :

$$R = \frac{X^9 - 4X^5 + 1}{X(X^2+1)\,(X+1)^2\,(X-1)^3}.$$

La fraction R est irréductible; ses pôles sont :

0, pôle simple;
j et $-$j, pôles simples;
-1, pôle double;
1, pôle triple.

Ecrivons R sous la forme

$$R = E + \frac{A}{X} + \frac{B}{X-\mathrm{j}} + \frac{C}{X+\mathrm{j}} + \frac{D}{(X+1)^2} + \frac{F}{X+1} + \frac{G}{(X-1)^3} + \\ + \frac{H}{(X-1)^2} + \frac{I}{X-1}.$$

Le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur, la partie entière E n'est pas nulle. Nous la calculons en divisant le numérateur par le dénominateur suivant les puissances décroissantes :

$$X^9 - 4X^5 + 1 = (X+1)\,(X^8 - X^7 - X^6 + X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X) + \\ + 2X^7 - 4X^5 - 2X^3 + X + 1.$$

La partie entière est donc $E = X+1$.

Considérons le pôle triple 1. Posons $Y=X-1$. Les coefficients G, H, I ne dépendent en fait que des termes en Y de degré inférieur à 2 (la division se faisant à l'ordre 2). Il nous suffira donc de diviser $-2-11\,Y-4\,Y^2$ par $8+24\,Y+$ $+30\,Y^2$ à l'ordre 2. On trouve ainsi $G=-1/4$, $H=-5/8$, $I=37/16$. Multiplions ensuite les deux membres par X, et substituons la valeur 0 : nous obtenons ainsi $A=-1$. Multiplions les deux membres par $X-\mathrm{j}$, et substituons à X la valeur j : nous trouvons de la sorte $B=(2-\mathrm{j})/8$; C est visiblement le nombre complexe conjugué de B, soit $C=(2+\mathrm{j})/8$. Multiplions les deux membres par $(X+1)^2$, et substituons à X la valeur -1, d'où $D=1/4$. Pour obtenir le dernier coefficient, soit F, on cherche le coefficient de $1/X$ dans les deux membres : $2=A+B+C+F+I$, d'où enfin $F=3/16$.

La décomposition est ainsi achevée, et elle se présente sous l'aspect suivant :

$$R = X+1-\frac{1}{X}+\frac{(2-\mathrm{j})/8}{X-\mathrm{j}}+\frac{(2+\mathrm{j})/8}{X+\mathrm{j}}+\frac{1/4}{(X+1)^2}+\frac{3/16}{X+1}-$$
$$-\frac{1/4}{(X-1)^3}-\frac{5/8}{(X-1)^2}+\frac{37/16}{X-1}.$$

Remarque. En analyse, on a parfois besoin d'une décomposition en termes réels d'une fraction dont les termes sont des polynômes à coefficients réels. On peut alors procéder comme ci-dessus puis « regrouper » les termes complexes conjugués. Dans l'exemple 5 ci-dessus

$$\frac{\frac{2-\mathrm{j}}{8}}{X-\mathrm{j}}+\frac{\frac{2+\mathrm{j}}{8}}{X+\mathrm{j}}=\frac{\frac{2-\mathrm{j}}{8}(X+\mathrm{j})+\frac{2+\mathrm{j}}{8}(X-\mathrm{j})}{X^2+1}=\frac{X/2+1/4}{X^2+1}.$$

On obtient alors pour R la décomposition

$$R = X+1-\frac{1}{X}+\frac{X/2+1/4}{X^2+1}+\frac{1/4}{(X+1)^2}+\frac{3/16}{X+1}-\frac{1/4}{(X-1)^3}-$$
$$-\frac{5/8}{(X-1)^2}+\frac{37/16}{X-1}.$$

EXERCICES

Problèmes linéaires

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à 2 à coefficients complexes.

9.1 Montrer que les polynômes

$$P_1 = 1+X-X^2, \quad P_2 = 1-X+X^2 \quad \text{et} \quad P_3 = -1+X+X^2$$

constituent une base de E.

9.2 Même question pour les polynômes

$$P_1 = X, \quad P_2 = X-1 \quad \text{et} \quad P_3 = X(X-1).$$

9.3 Même question pour les polynômes

$$P_1 = (1-X)^2, \quad P_2 = X(1-X) \quad \text{et} \quad P_3 = X^2.$$

Écrire la matrice de passage de la base $B=(1, X, X^2)$ à cette nouvelle base B' ; calculer la matrice inverse.

9.4 Montrer que l'application U qui à tout élément P de E associe

$$U(P) = (1-X)^2\, P(0) + 2X(1-X)\, P(1/2) + X^2 P(1)$$

est un endomorphisme de E. Écrire les matrices associées à U dans les bases B et B' de l'exercice précédent.

Divisions

Effectuer la division euclidienne de

9.5	$4X^5-2X^4+5X^3+4X+2$	par X^2+1
9.6	$4X^5-2X^4+5X^3-X^2$	par $4X^3-2X^2+X+2$
9.7	$-2X^5-2X^4-X^3+4X^2+4X+3$	par X^2+X+1
9.8	$-X^6+3X^2-4X+1$	par $X^7-4X^5+X^3-1$
9.9	$2X^4-3X^3+4X^2-5X+6$	par X^2-3X+1
9.10	$4X^3+X^2$	par $X+1+\mathrm{j}$
9.11	$2X^4+5X^2-10X+1$	par $2X^2-5X+5$
9.12	$X^4+\mathrm{j}X^3-\mathrm{j}X^2+X+1$	par $X^2-\mathrm{j}X+1$
9.13	$2X^5+3X^4+4X^3+4X^2+3X+2$	par X^3+X^2+X+1
9.14	$X^{18}-1$	par X^3-1
9.15	$X^3-3X^2+(\mathrm{j}+3)\,X-2-2\mathrm{j}$	par $X-\mathrm{j}$.

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de :

9.16 $3+X-2X^3$ par $3+X$ à l'ordre 4

9.17 $3+4X+4X^2-X^3-2X^4-2X^5$ par $1+X+X^2$ à l'ordre 9

9.18 $2+X-X^3$ par $1+3X-X^2-X^4$ à l'ordre 5

9.19 $1+X$ par $1-X^2+X^4$ à l'ordre 2

9.20 $4+4X+X^2$ par $2+X+X^2$ à l'ordre 3

9.21 $1-2X+X^4$ par $-1+3X+X^2$ à l'ordre 3.

Racines rationnelles

Déterminer les racines rationnelles des polynômes suivants :

9.22 $3X^3-2X^2+5X+2$

9.23 $8X^3+6X^2-4X-3$

9.24 $2X^4+3X^2+2X+3$

9.25 $4X^3-4X^2-X+1$

9.26 $4X^3-8X^2+5X-3$

9.27 $9X^5+15X^4-50X^3-39X^2+63X-98.$

Décompositions en éléments simples

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

9.28 $\dfrac{1}{1-X^2}$

9.29 $\dfrac{3-2X}{X^2-3X+2}$

9.30 $\dfrac{X^2-3X-2}{(X^2-1)(X-1)}$

9.31 $\dfrac{12X^2}{(X-1)(X+2)(X+3)}$

9.32 $\dfrac{4X^2}{X^4-1}$

9.33 $\dfrac{X^4}{(X+1)(X-1)^3}$

9.34 $\dfrac{1}{X^n-1}$ $n \in \mathbf{N}^*$

9.35 $\dfrac{1}{X^n+1}$ $n \in \mathbf{N}^*$

9.36 $\dfrac{(X^2-1)^2}{X(X+1)(X^2+1)}$

9.37 $\dfrac{1}{X(X+1)(X-1)^3}$

9.38 $\dfrac{X^4+X+1}{X(X-1)(X-2)}$

9.39 $\dfrac{X^4+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

9.40 $\dfrac{X^2-X+1}{X^2(X-1)^3}$

9.41 $\dfrac{X^6-2X^5-X^4+2X^3-3X^2-X-1}{(X-2)(X^2+1)}$

9.42 $\dfrac{2X^4+1}{(X-1)^3(X^2+1)}$

9.43 $\dfrac{X^6-9X^2-3}{X^4-3X^2-4}$

9.44 $\dfrac{X^3-X^2+5X+1}{(X^2+1)^2}$

9.45 $\dfrac{X^4+1}{(X^2-1)^3}$

9.46 $\dfrac{3X^4+17X^3+29X^2+21X+11}{(X-1)(X+2)^4}$

9.47 $\dfrac{X^4+1}{(X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2}$

9.48 $\dfrac{X^3+X^2+1}{(X^2+X+1)^3}$.

CHAPITRE 10

DIAGONALISATION DES MATRICES CARRÉES

Nous avons vu au nº 7.7 que les règles de calcul sur les matrices se simplifient considérablement dans le cas des matrices diagonales. La notion de polynôme va nous permettre dans certains cas de ramener l'étude des matrices à celle des matrices diagonales.

10.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme. Soient E un espace vectoriel sur K et U un endomorphisme de E. On dit qu'un scalaire λ est une valeur propre de U si le noyau E_λ de $U-\lambda I_E$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Le sous-espace vectoriel E_λ s'appelle alors sous-espace propre associé à la valeur propre λ; les éléments non nuls de E_λ sont appelés vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Autrement dit, pour qu'un élément $\boldsymbol{x}$ de E soit un vecteur propre de U, il faut et il suffit que $\boldsymbol{x}$ soit non nul et qu'il existe un scalaire λ tel que $U(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$; un tel scalaire λ est unique, et c'est une valeur propre de U.

Dans la suite de ce paragraphe, on désigne par n un entier naturel non nul et inférieur à 3.

On peut maintenant définir les *valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.* Soit M une matrice carrée d'ordre n à éléments dans K. On appelle valeurs propres et vecteurs propres de M les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à la matrice M.

Pour qu'un scalaire λ soit valeur propre de M, il faut et il suffit que la matrice $M-\lambda I_n$ ne soit pas inversible, ou encore que son déterminant soit nul :

$$\mathrm{Det}(\mathrm{M}-\lambda I_n) = 0.$$

La formule du développement du déterminant d'une matrice carrée montre que le déterminant de la matrice carrée $XI_n - M$, considérée comme élément de $\mathbf{M}_n[K(X)]$, est un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans K.

Le polynôme $\delta = \mathrm{Det}(XI_n - M)$ est appelé *polynôme caractéristique* de la matrice M.

Lorsque $n=2$,

$$\mathrm{Det}(XI_2 - M) = X^2 - (\alpha_{11}+\alpha_{22})\,X + \mathrm{Det}\,M.$$

Lorsque $n=3$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(XI_3 - M) = {} & X^3 - (\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})\,X^2 + \\ & + [(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}) + (\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32}) + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{13})]\,X - \\ & - \mathrm{Det}\,M.\end{aligned}$$

Les valeurs propres de M ne sont autres que les racines du polynôme caractéristique de M.

Soient maintenant U un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur K, B une base de E, et $M_B(U)$ la matrice associée à U dans cette base.

Alors le polynôme $\mathrm{Det}[XI_n - M_B(U)]$ est indépendant de la base B; on l'appelle polynôme caractéristique de l'endomorphisme U.

Soient en effet B' une autre base de E, et P la matrice de passage de B à B'. Les matrices $M_B(U)$ et $M_{B'}(U)$ sont donc liées par la relation

$$M_{B'}(U) = P^{-1}\, M_B(U)\, P\,.$$

Il en découle que

$$XI_n - M_{B'}(U) = P^{-1}[XI_n - M_B(U)]\, P\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}[XI_n - M_{B'}(U)] &= \mathrm{Det}(P^{-1})\,.\,\mathrm{Det}[XI_n - M_B(U)]\,.\,\mathrm{Det}\,P = \\ &= \mathrm{Det}[XI_n - M_B(U)]\,,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver.

Les valeurs propres de U ne sont autres que les racines du polynôme caractéristique de U.

10.2 Endomorphismes et matrices diagonalisables. Soit U un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur K. On dit que U est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de U.

Remarque. Supposons que l'espace vectoriel E soit de dimension finie n. D'après le n° 7.7, une base $B=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E est constituée de vecteurs propres de U si et seulement si la matrice $M_B(U)$ est de la forme

$$M_B(U) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de U sont alors les scalaires λ_i et, pour toute valeur propre λ, le sous-espace propre E_λ de U associé à λ admet pour base la famille des vecteurs e_i tels que $\lambda_i = \lambda$.

Soit maintenant M une matrice carrée d'ordre n à éléments dans K. On dit que M est diagonalisable si l'endomorphisme U de K^n canoniquement associé à M est diagonalisable. On peut caractériser très simplement une matrice diagonalisable. Pour que M soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe un élément P de $\mathbf{GL}_n(K)$ tel que la matrice $M' = P^{-1}\, MP$ soit diagonale.

En effet, si M est diagonalisable, il existe une base B' de K^n telle que la matrice $M' = M_{B'}(U)$ soit diagonale. Soit P la matrice de passage de la base canonique B de K^n à la base B'. Alors $M' = P^{-1}\, MP$.

Réciproquement, soit P une matrice carrée inversible telle que la matrice $M' = P^{-1} MP$ soit diagonale. Désignons par B' l'unique base de K^n telle que la matrice de passage de B à B' soit P. La matrice $M_{B'}(U)$, n'étant autre que M', est diagonale, ce qui montre que l'endomorphisme U est diagonalisable.

10.3 Indépendance linéaire des vecteurs propres. Soient U un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur K, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de U distinctes deux à deux et $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_p$ des vecteurs propres de U associés respectivement à ces valeurs propres. Alors les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_p$ sont linéairement indépendants.

Pour $p = 1$, l'assertion est évidente; supposons-la prouvée à l'ordre $p-1$, $p > 1$, et considérons une relation linéaire

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \dots + \alpha_p \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

entre les vecteurs propres $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_p$.

En appliquant l'endomorphisme U aux deux membres, nous obtenons la relation

$$\lambda_1 \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \lambda_i \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \dots + \lambda_p \alpha_p \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Multiplions la relation (1) par le scalaire λ_p, et retranchons-la de la relation (2) :

$$(\lambda_1 - \lambda_p)\, \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + (\lambda_i - \lambda_p)\, \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)\, \alpha_{p-1} \boldsymbol{x}_{p-1} = \boldsymbol{0}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les scalaires $(\lambda_i - \lambda_p)\, \alpha_i$ sont nuls, quel que soit $i \in [1, p-1]$. Comme les scalaires $\lambda_i - \lambda_p$ ne sont pas nuls, il en découle que $\alpha_i = 0$, pour tout $i \in [1, p-1]$.

La relation (1) s'écrit alors $\alpha_p \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{0}$; donc $\alpha_p = 0$.

Il en résulte qu'étant donné U un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur K, si U a n valeurs propres distinctes, U est diagonalisable. Soient en effet $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de U et, pour tout élément i de $[1, n]$, $\boldsymbol{x}_i$ un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ_i. Alors la famille $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ est libre; ayant n éléments, cette famille est une base de E.

Remarque. Ce corollaire ne caractérise pas les endomorphismes diagonalisables. En effet, une homothétie est diagonalisable, bien qu'elle n'ait qu'une seule valeur propre, à savoir son rapport.

Soit U un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur K. La dimension d'un sous-espace propre E_λ est toujours supérieure à 1; on démontre qu'elle est inférieure à la multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique de U. Pour que U soit diagonalisable, il faut et il suffit que, pour toute valeur propre λ, la dimension de E_λ soit égale à la multiplicité de λ et que la somme des multiplicités des valeurs propres de U soit égale à n. (D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, cette dernière condition est toujours satisfaite lorsque K est le corps des nombres complexes.)

Ainsi, lorsque $n=2$, U est diagonalisable dans les cas suivants :

— le polynôme caractéristique de U a deux racines distinctes;

— le polynôme caractéristique de U a une racine double, et le sous-espace propre associé à l'unique valeur propre est de dimension 2. (Alors U est une homothétie.)

Lorsque $n=3$, U est diagonalisable dans les cas suivants :

— le polynôme caractéristique de U a trois racines distinctes;

— le polynôme caractéristique de U a une racine simple et une racine double, et le sous-espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 2;

— le polynôme caractéristique de U a une racine triple, et le sous-espace propre associé à l'unique valeur propre est de dimension 3. (Alors U est une homothétie.)

En pratique, on choisit une base B de E. Soit $M=(\alpha_{ij})$ la matrice associée à U dans cette base. Pour toute valeur propre λ, les composantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ d'un vecteur propre associé à λ sont solutions du système de n équations linéaires homogènes à n inconnues

$$\begin{cases} \lambda\xi_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1j}\xi_j + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \lambda\xi_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2j}\xi_j + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\xi_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{ij}\xi_j + \ldots + \alpha_{in}\xi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\xi_n = \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nj}\xi_j + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n. \end{cases}$$

EXEMPLES

1. *Soit U l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est*

$$\begin{pmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{pmatrix}.$$

Montrer que U est diagonalisable, et expliciter une base de vecteurs propres.

Le polynôme caractéristique de U est

$$\delta = X^3-6X^2+11X-6.$$

Il est immédiat que 1 est racine. Divisons δ par $X-1$:

$$\delta = (X-1)(X^2-5X+6).$$

Il s'ensuit que U a pour valeurs propres les trois nombres réels 1, 2 et 3, et donc que U est diagonalisable.

Les composantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 vérifient le système

$$\begin{cases} 33\xi_1+16\xi_2+72\xi_3 = \xi_1 \\ -24\xi_1-10\xi_2-57\xi_3 = \xi_2 \\ -\ 8\xi_1-\ 4\xi_2-17\xi_3 = \xi_3, \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} 32\xi_1+16\xi_2+72\xi_3 = 0 \\ -24\xi_1-11\xi_2-57\xi_3 = 0 \\ -\ 8\xi_1-\ 4\xi_2-18\xi_3 = 0. \end{cases}$$

La première et la troisième équation sont équivalentes. Nous sommes ainsi ramenés à un système de deux équations homogènes à trois inconnues :

$$\begin{cases} 24\xi_1+11\xi_2+57\xi_3 = 0 \\ 8\xi_1+\ 4\xi_2+18\xi_3 = 0. \end{cases}$$

D'où, à un facteur près, $\xi_1 = -15$, $\xi_2 = 12$ et $\xi_3 = 4$. Nous obtenons de même pour $\lambda = 2$ et pour $\lambda = 3$ (toujours à un facteur près) les vecteurs de composantes $(-16, 13, 4)$ et $(4, -3, -1)$. La matrice de passage à la base de vecteurs propres ainsi obtenue est

$$\begin{pmatrix} -15 & -16 & 4 \\ 12 & 13 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à U dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Diagonaliser l'élément suivant de* $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient U l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M et $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ un élément de $\mathbf{R}^3$. Alors $U(\boldsymbol{x}) = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\boldsymbol{f}$, où $\boldsymbol{f} = (1, 1, 1)$. Supposons que $\boldsymbol{x}$ soit un vecteur propre. Deux cas se présentent :

— le vecteur $\boldsymbol{x}$ est colinéaire à $\boldsymbol{f}$; le vecteur $\boldsymbol{f}$ est effectivement un vecteur propre, associé à la valeur propre 3;

— le vecteur $U(\boldsymbol{x})$ est nul; le plan P d'équation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ est un sous-espace propre, associé à la valeur propre 0.

Il s'ensuit que M est diagonalisable. On obtient une base de vecteurs propres en réunissant $\boldsymbol{f}$ et une base du plan P.

3. *On considère l'élément suivant de* $\mathbf{M}_3(\mathbf{C})$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est-elle diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de M est

$$X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2 (X-2).$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est la droite engendrée par le vecteur (4, 15, 10); sa dimension est strictement inférieure à 2, ce qui montre que la matrice M n'est pas diagonalisable.

4. *On considère l'élément suivant de* $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbf{R}$. *La matrice M est-elle diagonalisable ?*

Le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 2\cos\theta + 1$; il n'admet pas de racine réelle si $\cos\theta \neq \pm 1$. Dans ce cas, la matrice M n'est pas diagonalisable. Si $\cos\theta = \pm 1$, alors $\sin\theta = 0$. La matrice M, étant diagonale, est évidemment diagonalisable.

EXERCICES

Diagonalisation des matrices carrées

Pour chacune des matrices carrées à éléments complexes suivantes, calculer le polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres.

10.1 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **10.2** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **10.3** $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

10.4 $\begin{pmatrix} -1 & 2j \\ -2j & 2 \end{pmatrix}$ **10.5** $\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$ **10.6** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

10.7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **10.8** $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ **10.9** $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -12 & 9 \end{pmatrix}$

10.10 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **10.11** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **10.12** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

10.13 Sans calculer le polynôme caractéristique, trouver une base de vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.14 Déterminer les suites $(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta')$ des nombres complexes telles que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$$

admette pour vecteurs propres les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ et $(1, -1, 1)$.

10.15 Déterminer le nombre réel α pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable. Expliciter alors une base de vecteurs propres de M.

CHAPITRE 11

APPLICATIONS DU CALCUL MATRICIEL AUX QUADRIPÔLES ÉLECTRIQUES

11.1 Généralités. Un circuit électrique possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie est appelé quadripôle. On distingue deux grandes catégories : les quadripôles linéaires et les quadripôles non linéaires. Nous n'envisagerons dans ce qui suit que le comportement des quadripôles linéaires. Suivant la nature des composants constitutifs, ils peuvent encore être qualifiés de : passifs, actifs, symétriques ou dissymétriques.

Considérons un quadripôle, noté Q, et désignons par i_1 et v_1 les grandeurs (respectivement : courant et tension) d'entrée et par i_2 et v_2 les grandeurs de sortie.

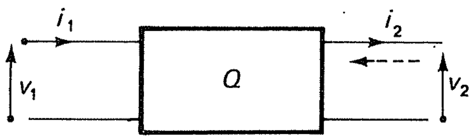


FIG. 11.1

Si l'on se fixe deux de ces grandeurs, les deux autres deviennent de ce fait déterminées. Suivant le choix des grandeurs fixées, il est possible d'établir six systèmes différents de deux équations. Il existe, en effet, six façons distinctes de grouper quatre grandeurs deux à deux.

Le sens des courants i_1 et i_2 est arbitraire et il faudra toujours veiller, dans les calculs, à adopter les équations correspondant au sens que l'on s'est fixé.

Les coefficients qui lient les grandeurs d'entrée et de sortie aux éléments du circuit sont appelés *paramètres* du quadripôle. Dans le cas des quadripôles linéaires, ces paramètres seront toujours les éléments d'une matrice carrée d'ordre 2.

Matrice impédance : Z. Si on se fixe v_1 et v_2, ou ce qui revient au même on définit i_1 et i_2 comme variables indépendantes, il est possible de former le système linéaire suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix},$$

où $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$ représentent les paramètres « impédances » du quadripôle et $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ sa matrice impédance. Le nom des éléments z_{ij} est justifié par le fait qu'ils sont physiquement homogènes à des impédances.

En d'autres termes, cela signifie que dans un espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une certaine base, les vecteurs $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{V}$, etc. de composantes scalaires $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, etc. sont liés par un endomorphisme f de matrice Z tels que

$$V = f(I) \Leftrightarrow V = ZI.$$

Matrice admittance : Y. Si l'on se fixe les variables indépendantes v_1 et v_2, on obtient de même un système linéaire :

$$(S') \begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

dont les éléments y_{ij} sont cette fois homogènes à des admittances.

On constate alors que la résolution du système (S) précédent conduit au système (S'). Par conséquent, la matrice Y est l'inverse de la matrice Z.

$$Z^{-1} = Y \qquad \text{ou} \qquad Y^{-1} = Z.$$

Matrice hybride : H. Dans cette représentation les variables indépendantes choisies sont i_1 et v_2 et, dans ces conditions :

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Les éléments h_{ij} de la matrice H ne sont pas tous homogènes à la même grandeur physique. Cela justifie le nom « hybride » donné à ces paramètres.

Matrice hybride inverse : G. Ici les variables indépendantes fixées sont v_1 et i_2 et, dans ces conditions :

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}i_2 \\ v_2 = g_{21}v_1 + g_{22}i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $G = H^{-1}$ et $H = G^{-1}$.

Matrice de transfert : A **(de transférance ou de chaîne).** Les variables indépendantes fixées sont ici les grandeurs de sorties v_2 et i_2.

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}v_2 + a_{12}i_2 \\ i_1 = a_{21}v_2 + a_{22}i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Matrice de transfert inverse : B. Elle est définie par le système linéaire

$$\begin{cases} v_2 = b_{11}v_1 + b_{12}i_1 \\ i_2 = b_{21}v_1 + b_{22}i_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Remarquons ici que le terme « transfert inverse » est impropre en réalité, car la matrice B ainsi définie n'est pas l'inverse de la matrice A. Cette matrice B est rarement utilisée en pratique.

11.2 Détermination des paramètres. Pour trouver rapidement la signification des paramètres précédemment définis, il suffit de fixer une condition particulière dans son équation de définition. Par exemple, si nous désirons connaître ce que représente le paramètre h_{21} nous partirons de l'équation

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2,$$

dans laquelle nous faisons $v_2 = 0$, ce qui correspond physiquement à mettre la sortie du quadripôle en court-circuit. Il vient alors :

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}, \quad \text{avec} \quad v_2 = 0.$$

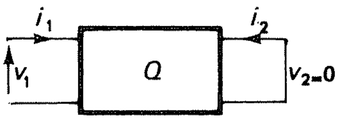


FIG. 11.2

Le paramètre h_{21} exprime de ce fait le gain en courant lorsque la sortie est court-circuitée.

On procède ainsi pour chacun des paramètres.

11.3 Relations entre les différents paramètres. Les lois élémentaires de l'électricité permettent d'exprimer chacunes des matrices précédemment définies en fonction des éléments d'une autre, ce passage d'une matrice à l'autre étant nécessaire, comme nous le verrons plus loin, à la pratique des calculs. Cette correspondance est résumée dans le tableau de la page 191. Suivant le sens adopté du courant de sortie i_2 il y a lieu de changer le signe de certains éléments des matrices. Chaque fois que i_2 entre dans le quadripôle, c'est le signe encerclé qu'il y a lieu de considérer comme valable.

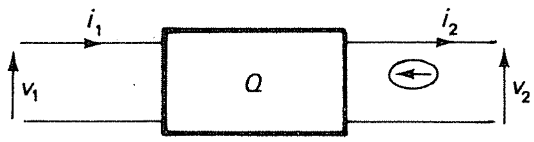


FIG. 11.3

Δ_k désigne le déterminant de la matrice k, avec $k = Z, Y, H, G, A$, suivant le cas.

Tableau des relations entre les paramètres usuels d'un quadripôle linéaire

	Impédance Z	Admittance Y	Hybride H	Hybride inverse G	Transfert ou chaîne A
Impédance $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{22}/\Delta_y & -y_{12}/\Delta_y \\ -y_{21}/\Delta_y & y_{11}/\Delta_y \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta_h/h_{22} & h_{12}/h_{22} \\ -h_{21}/h_{22} & 1/h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/g_{11} & -g_{12}/g_{11} \\ g_{21}/g_{11} & \Delta_g/g_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{11}/a_{21} & \oplus -\Delta_a/a_{21} \\ 1/a_{21} & \oplus -a_{22}/a_{21} \end{matrix}$
Admittance $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} z_{22}/\Delta_z & -z_{12}/\Delta_z \\ -z_{21}/\Delta_z & z_{11}/\Delta_z \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/h_{11} & -h_{12}/h_{11} \\ h_{21}/h_{11} & \Delta_h/h_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta_g/g_{22} & g_{12}/g_{22} \\ -g_{21}/g_{22} & 1/g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{22}/a_{12} & -\Delta_a/a_{12} \\ \ominus 1/a_{12} & \oplus -a_{11}/a_{12} \end{matrix}$
Hybride $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \Delta_z/z_{22} & z_{12}/z_{22} \\ -z_{21}/z_{22} & 1/z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/y_{11} & -y_{12}/y_{11} \\ y_{21}/y_{11} & \Delta_y/y_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{22}/\Delta_g & -g_{12}/\Delta_g \\ -g_{21}/\Delta_g & g_{11}/\Delta_g \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{12}/a_{22} & \Delta_a/a_{22} \\ \ominus 1/a_{22} & \oplus -a_{21}/a_{22} \end{matrix}$
Hybride inverse $\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 1/z_{11} & -z_{12}/z_{11} \\ z_{21}/z_{11} & \Delta_z/z_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta_y/y_{22} & y_{12}/y_{22} \\ -y_{21}/y_{22} & 1/y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{22}/\Delta_h & -h_{12}/\Delta_h \\ -h_{21}/\Delta_h & h_{11}/\Delta_h \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{21}/a_{11} & \ominus \Delta_a/a_{11} \\ 1/a_{11} & \oplus -a_{12}/a_{11} \end{matrix}$
Transfert ou chaîne $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} z_{11}/z_{21} & \oplus -\Delta_z/z_{21} \\ 1/z_{21} & \oplus -z_{22}/z_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -y_{22}/y_{21} & \ominus 1/y_{21} \\ -\Delta_y/y_{21} & \ominus y_{11}/y_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\Delta_h/h_{21} & \ominus h_{11}/h_{21} \\ -h_{22}/h_{21} & \ominus 1/h_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/g_{21} & \oplus -g_{22}/g_{21} \\ g_{11}/g_{21} & \oplus -\Delta_g/g_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$

11.4 Les différents modes d'association des quadripôles linéaires. Il existe cinq manières simples et distinctes d'associer des quadripôles. Dans chacun des cas, il est possible d'exprimer les paramètres du quadripôle équivalant à l'ensemble par une opération matricielle élémentaire. Il est supposé que chaque quadripôle conserve ses propriétés individuelles.

Association « série-série ». Ce qui signifie que toutes les entrées et toutes les sorties des quadripôles constituant cette association sont branchées en série. Nous raisonnerons sur deux quadripôles Q_1 et Q_2 seulement.

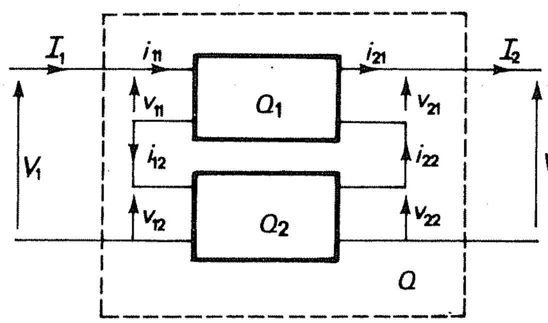


FIG. 11.4

Dans ce cas, les courants d'entrées sont égaux et il en est de même pour les courants de sorties.

$$\begin{cases} I_1 = i_{11} = i_{12} \\ I_2 = i_{21} = i_{22}. \end{cases} \tag{1}$$

Quant aux tensions d'entrées, elles s'ajoutent :

$$\begin{cases} V_1 = v_{11}+v_{12} \\ V_2 = v_{21}+v_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} \text{ en notation matricielle.}$$

Si nous désignons par

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_{11}^1 & z_{12}^1 \\ z_{21}^1 & z_{22}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} z_{11}^2 & z_{12}^2 \\ z_{21}^2 & z_{22}^2 \end{pmatrix}$$

les matrices impédances respectives de chacun des quadripôles constituant cette association et par Z la matrice impédance du quadripôle Q résultant, il découle de (1) que

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = Z_1 \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{21} \end{pmatrix} = Z_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

et que

$$\begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = Z_2 \begin{pmatrix} i_{12} \\ i_{22} \end{pmatrix} = Z_2 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = Z_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + Z_2 \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

$$Z \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Z_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + Z_2 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$Z = Z_1 + Z_2 .$$

En généralisant ce procédé nous obtenons la règle de calcul suivante :

La matrice impédance Z d'une association « série-série » de n quadripôles est égale à la somme des matrices impédances Z_i de chacun des Q_i quadripôles constituant cette association.

$$\boxed{Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i .}$$

Association « parallèle-parallèle ». Dans ce cas les bornes d'entrées et les bornes de sorties sont reliées deux à deux (ou n à n) conformément à la figure suivante.

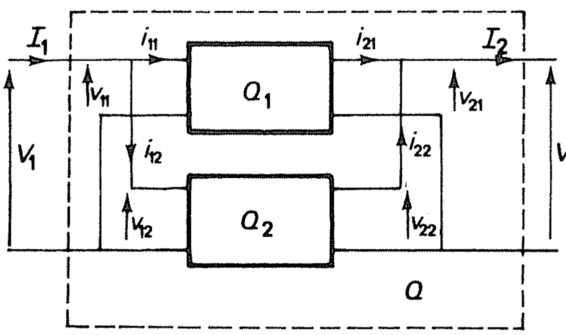


FIG. 11.5

Alors :

$$\begin{cases} I_1 = i_{11}+i_{12} \\ I_2 = i_{21}+i_{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = v_{11} = v_{12} \\ V_2 = v_{21} = v_{22} \end{cases}$$

Un calcul tout à fait analogue au précédent nous conduit à la règle suivante :

La matrice admittance Y d'une association « parallèle-parallèle » de n quadripôles linéaires est égale à la somme des matrices admittances Y_i de chacun des quadripôles.

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,.}$$

Association « série-parallèle ». Dans ce cas, les entrées sont branchées en série et les sorties en parallèle.

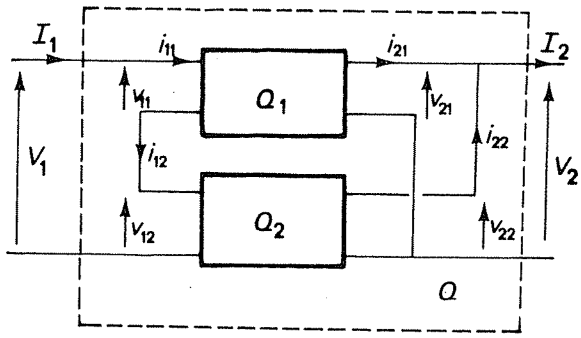


FIG. 11.6

Les lois de l'électricité nous permettent d'écrire :

$$(1) \begin{cases} I_1 = i_{11} = i_{12} \\ V_2 = v_{21} = v_{22} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} V_1 = v_{11}+v_{12} \\ I_2 = i_{21}+i_{22} \end{cases}$$

Les paramètres hybrides de chacun des quadripôles sont liés aux systèmes d'équations définis plus haut par :

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ i_{21} \end{pmatrix} = H_1 \cdot \begin{pmatrix} i_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = H_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{12} \\ i_{22} \end{pmatrix} = H_2 \begin{pmatrix} i_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = H_2 \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

où H_1, H_2 et H désignent les matrices hybrides respectives à chacun des quadripôles de même indice :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Or, d'après (2), cette dernière équation est égale à :

$$H \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ i_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{12} \\ i_{22} \end{pmatrix} = H_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + H_2 \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire la relation :

$$H = H_1 + H_2 .$$

La matrice hybride H d'une association « série-parallèle » est toujours égale à la somme des matrices hybrides des quadripôles constituant cette association :

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{n} H_i .}$$

Association « parallèle-série ». Dans ce mode de branchement, les entrées sont en parallèle et les sorties en série.

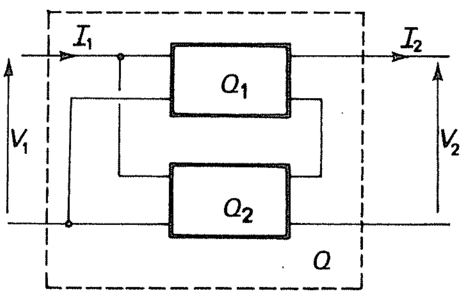


FIG. 11.7

Une démonstration tout à fait analogue à la précédente montre que, dans ce cas, il suffit de faire la somme des matrices hybrides inverses G_i de chacun des quadripôles pour obtenir la matrice G du quadripôle Q résultant :

$$\boxed{G = \sum_{i=1}^{n} G_i .}$$

Association « en cascade » ou « en chaîne ». Les quadripôles sont ici placés les uns à la suite des autres suivant la figure 11.8.

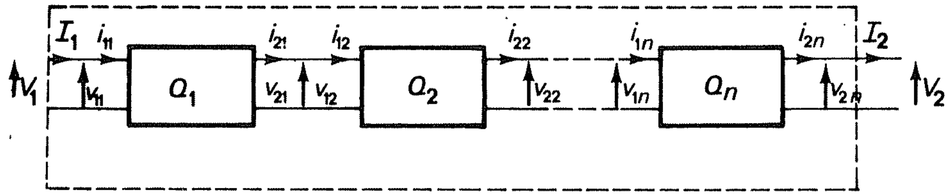


FIG. 11.8

Nous pouvons écrire :

$$V_1 = v_{11}\,; \qquad v_{21} = v_{12}\,, \dots, v_{2n} = V_2\,;$$
$$I_1 = i_{11}\,; \qquad i_{21} = i_{12}\,, \dots, i_{2n} = I_2\,;$$

d'où les égalités de matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ i_{11} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} v_{21} \\ i_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ i_{12} \end{pmatrix}; \dots, \begin{pmatrix} v_{2n} \\ i_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Si nous désignons par $A_1, A_2, \dots, A_n$, la matrice de transfert de chaque quadripôle, nous avons :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ i_{11} \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} v_{21} \\ i_{21} \end{pmatrix} \qquad \text{pour le premier quadripôle,}$$

$$\begin{pmatrix} v_{12} \\ i_{12} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} v_{22} \\ i_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{pour le second quadripôle,}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} v_{1n} \\ i_{1n} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} v_{2n} \\ i_{2n} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad \text{pour le } n\text{-ième quadripôle.}$$

En appliquant tour à tour les égalités (1) il vient :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A_1 \,.\, A_2 \,.\, \dots\, A_n \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Par ailleurs, le quadripôle Q résultant de cette association en cascade a pour matrice de transfert A celle définie par l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En identifiant les équations (2) et (3) nous obtenons :

$$A = A_1\, A_2\, A_3 \dots A_n\,.$$

Ce qui nous conduit à la règle suivante :

La matrice de transfert A d'une association en cascade de n quadripôles est égale au produit dans l'ordre des matrices de transfert individuelles A_i de chacun des quadripôles.

$$\boxed{A = \prod_{i=1}^{n} A_i.}$$

Ce produit n'est pas commutatif et doit être effectué dans le même ordre que celui dans lequel sont placés les quadripôles.

EXEMPLES

1. *On considère les trois quadripôles suivants :*

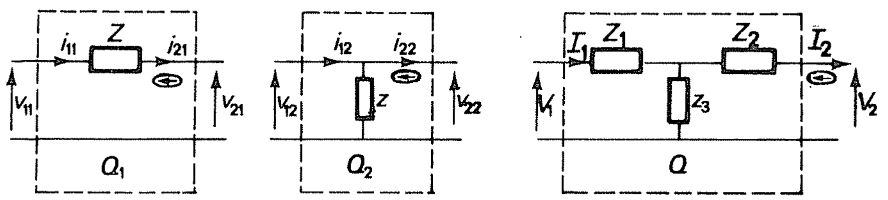


FIG. 11.9

1° *Calculer la matrice de transfert de chacun des quadripôles, en désignant par A_1, A_2 et A les matrices de transfert respectives.*

2° *Montrer que $A = A_1 A_2 A_3$.*

3° *Établir la matrice impédance **Z** du quadripôle Q.*

4° *Vérifier le résultat en utilisant les données du tableau des correspondances entre les paramètres d'un quadripôle.*

Les lois de l'électricité nous permettent d'écrire les relations suivantes :

$$Q_1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_{11} &= v_{21} + Z i_{21} \\ i_{11} &= 0 v_{21} + i_{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & \ominus 1 \end{pmatrix}$$

Le signe encerclé correspond au cas où le courant de sortie du quadripôle est celui encerclé sur la figure.

$$Q_2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_{12} &= v_{22} + 0 i_{22} \\ i_{12} &= v_{22}/z + i_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/z & \ominus 1 \end{pmatrix}$$

Pour le troisième quadripôle, il est plus rapide d'écrire la matrice impédance :

$$Q \Rightarrow \left.\begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_3)\, I_1 - Z_3 I_2 \\ V_2 &= Z_3 I_1 - (Z_2 + Z_3)\, I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & \underset{\oplus}{-} Z_3 \\ Z_3 & \underset{\oplus}{-}(Z_2 + Z_3) \end{pmatrix}$$

De la seconde équation on tire

$$I_1 = \frac{V_2}{Z_3} \overset{+}{\ominus} \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} I_2$$

qui remplacée dans la première donne :

$$V_1 = \frac{Z_1+Z_3}{Z_3} V_2 \overset{+}{\ominus} \frac{Z_1 Z_2+Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_3} I_2 .$$

La matrice de transfert cherchée peut de ce fait s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} (Z_1/Z_3+1) & \overset{+}{\ominus}(Z_1 Z_2/Z_3+Z_1+Z_2) \\ 1/Z_3 & \overset{+}{\ominus}(Z_2/Z_3+1) \end{pmatrix}$$

En observant ce troisième quadripôle, nous constatons qu'il est constitué par une association en cascade de trois quadripôles élémentaires du même type que les quadripôles Q_1 et Q_2 :

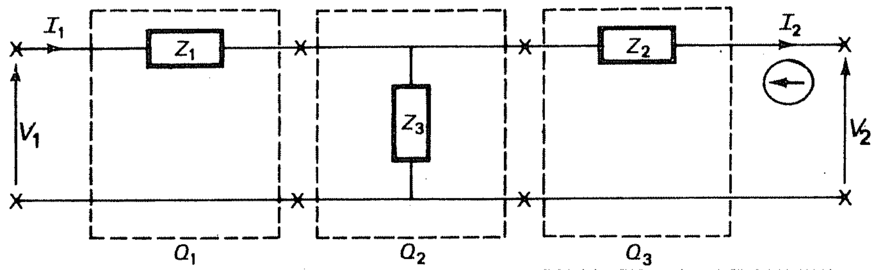


FIG. 11.10

Les résultats précédemment établis permettent d'écrire la matrice de transfert de chacun des quadripôles élémentaires en remplaçant Z par Z_1 pour le premier dans A_1, Z par Z_3 dans le second pour A_2 et Z par Z_2 dans le premier pour A_3. La règle de calcul valable dans le cas d'une association en cascade implique alors que

$$A = A_1 A_2 A_3 .$$

Effectuons dans l'ordre ce produit matriciel :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_3 & Z_1 \\ 1/Z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_3 & Z_1+Z_2+Z_1 Z_2/Z_3 \\ 1/Z_3 & Z_2/Z_3+1 \end{pmatrix} .$$

Ce qui vérifie bien le résultat déjà trouvé plus haut.

Nous avons déjà déterminé la matrice impédance Z du quadripôle Q à partir des lois de l'électricité.

Vérifions ce résultat à l'aide du tableau des correspondances entre les différents paramètres.

Nous avions :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1+Z_3 & -Z_3 \\ Z_3 & -(Z_2+Z_3) \end{pmatrix} \quad \text{pour } Q.$$

Le tableau des relations entre les paramètres nous donne

$$A = \begin{pmatrix} z_{11}/z_{21} & -\Delta_z/z_{21} \\ 1/z_{21} & -z_{22}/z_{21} \end{pmatrix} \quad \text{avec ici} \quad \begin{aligned} z_{11} &= Z_1+Z_3 \\ z_{21} &= Z_3 \\ z_{12} &= -Z_3 \\ z_{22} &= -(Z_2+Z_3) \end{aligned}$$

et

$$\Delta_z = Z_3^2 - (Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) = -Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3.$$

De telle sorte que

$$\begin{aligned} z_{11}/z_{21} &= (Z_1+Z_3)/Z_3\,; & -\Delta_z/Z_{21} &= Z_1+Z_2+Z_1Z_2/Z_3 \\ 1/z_{21} &= 1/Z_3\,; & -z_{22}/z_{21} &= (Z_2+Z_3)/Z_3, \end{aligned}$$

d'où la matrice de transfert A cherchée :

$$A = \begin{pmatrix} (Z_1+Z_3)/Z_3 & Z_1+Z_2+Z_1Z_2/Z_3 \\ 1/Z_3 & (Z_2+Z_3)/Z_3 \end{pmatrix}$$

qui correspond bien au résultat déjà trouvé et valable dans le cas où I_2 a le sens positif, c'est-à-dire sortant du quadripôle.

2. *On considère le quadripôle Q suivant, supposé linéaire et travaillant en régime sinusoïdal :*

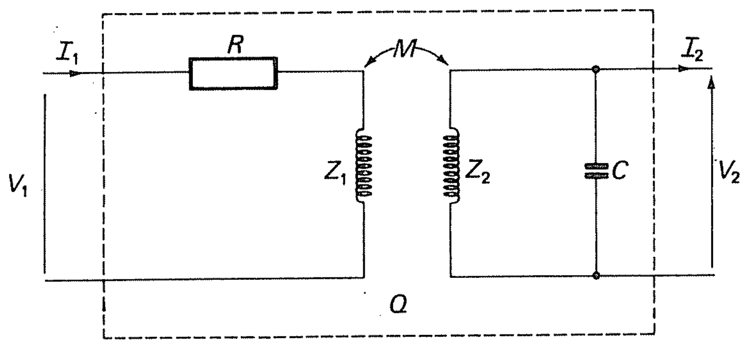


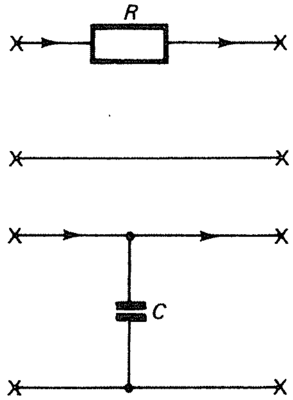
FIG. 11.11

1° *Calculer la matrice de transfert A de ce quadripôle Q.*

2° *En déduire l'impédance d'entrée Z_e de Q.*

3° *Dans le cas particulier où* $Z_1 = Z_2 = \mathrm{j}L\omega$ et $LC\omega^2 = 1$ *calculer A et Z_e. Justifier physiquement la valeur ainsi trouvée de Z_e.*

1° Nous voyons dès le départ que le quadripôle Q est constitué par une association en cascade de trois quadripôles élémentaires. Il nous faut donc déterminer les matrices de transfert de chacun d'eux. La première et la dernière ont déjà été calculées dans l'exercice précédent.

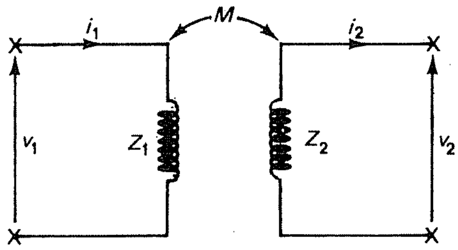


$$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}C\omega & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 11.12

Pour trouver la matrice de transfert du transformateur, supposé parfait, il suffit de remarquer que :



$$\begin{cases} v_1 = Z_1 i_1 - \mathrm{j}M\omega i_2 \\ v_2 = \mathrm{j}M\omega i_1 - Z_2 i_2 \end{cases}$$

FIG. 11.13

d'où la matrice impédance $\mathbf{Z}$ du transformateur :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & -jM\omega \\ jM\omega & -Z_2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les données du tableau des relations entre les paramètres, on calcule directement la matrice de transfert A_2 du transformateur :

$$A_2 = \frac{1}{jM\omega}\begin{pmatrix} Z_1 & (Z_1 Z_2 + M^2\omega^2) \\ 1 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de transfert A du quadripôle Q complet s'écrit donc

$$A = A_1 A_2 A_3,$$

c'est-à-dire :

$$A = \frac{1}{jM\omega}\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 & Z_1 Z_2 + M^2\omega^2 \\ 1 & Z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ jC\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant ce produit matriciel il vient :

$$A = \frac{1}{jM\omega}\begin{pmatrix} R + Z_1 + jC\omega(Z_1 Z_2 + M^2\omega^2 + RZ_2) & Z_1 Z_2 + M^2\omega^2 + RZ_2 \\ 1 + jC\omega Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}$$

Le système linéaire associé à la matrice A étant de la forme

$$\begin{cases} V_1 = a_{11} V_2 + a_{12} I_2 \\ I_1 = a_{21} V_2 + a_{22} I_2 \end{cases}$$

l'impédance d'entrée Z_e est égale à $V_1/I_1 = a_{11}/a_{21} = Z_e$, puisque $I_2 = 0$. Soit

$$Z_e = \frac{Z_1 + R + (Z_1 Z_2 + M^2\omega^2 + RZ_2)\,jC\omega}{1 + jC\omega Z_2}.$$

3° Si $Z_1 = Z_2 = jL\omega$ la matrice A précédente s'écrit :

$$A = \frac{1}{jM\omega}\begin{pmatrix} R + jL\omega + jC\omega(-L^2\omega^2 + M^2\omega^2 + jLR\omega) & M^2\omega^2 - L^2\omega^2 + jLR\omega \\ 1 - LC\omega^2 & jL\omega \end{pmatrix}$$

De plus,

$$Z_e = \frac{R + jL\omega + jC\omega(-L^2\omega^2 + M^2\omega^2 + jLR\omega)}{1 - LC\omega^2}$$

et si enfin $LC\omega^2 = 1$, $Z_e = \infty$.

Ce résultat est physiquement justifié puisque le circuit secondaire est dans ce cas accordé et l'impédance rapportée au primaire est infinie.

3. On considère le circuit linéaire suivant, où G représente un amplificateur. Calculer le rapport V_2/V_1, appelé gain en tension du quadripôle.

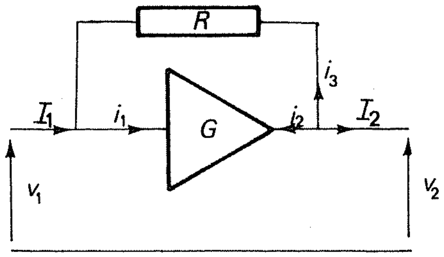


FIG. 11.14

On désignera par $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$

la matrice impédance de l'amplificateur G considéré seul.

D'après le sens des courants adopté, nous pouvons établir les équations suivantes :

$$I_2 = 0 ; \qquad V_1 = V_2 - Ri_3 ; \qquad 0 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_2 = -i_3 .$$

La matrice Z donnée est associée au système linéaire

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ V_2 &= z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow i_2 = \frac{\begin{vmatrix} z_{11} & V_1 \\ z_{21} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}} .$$

Posons $\Delta =$ Det $Z = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}$.
L'intensité i_2 est donc égale à

$$i_2 = \frac{z_{11} V_2 - z_{21} V_1}{\Delta} .$$

Or, d'après les équations précédentes nous pouvons aussi écrire que $V_1 = V_2 + Ri_2$, puisque $i_2 = -i_3$, c'est-à-dire

$$i_2 = \frac{V_1 - V_2}{R} .$$

Égalons ces deux expressions de i_2 :

$$\frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{z_{11} V_2 - z_{21} V_1}{\Delta} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta + Rz_{21}}{\Delta + Rz_{11}}} .$$

Ce rapport est appelé « gain avec contre réaction ».

Il est parfois utile d'exprimer ce gain avec contre réaction en fonction du gain G de l'amplificateur considéré seul. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{cases}$$

et comme dans ce cas $i_2 = 0$, on a $G = v_2/v_1 = z_{21}/z_{11}$.

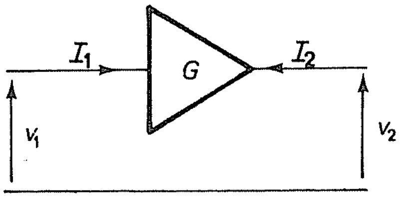


FIG. 11.15

Si nous mettons z_{21} et z_{11} en facteur dans le rapport $\dfrac{V_2}{V_1}$ précédent, nous pouvons mettre G en évidence et écrire :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}(\Delta/z_{21}+R)}{z_{11}(\Delta/z_{11}+R)} = G\,\frac{\Delta/Rz_{21}+1}{\Delta/Rz_{11}+1}.$$

Ce qui correspond au gain du montage proposé avec contre-réaction exprimé en fonction du gain G sans contre-réaction.

11.5 Six exercices

Exercice 1. *On considère un quadripôle Q passif linéaire et symétrique. On désigne par « impédance caractéristique », notée Z_c, une impédance particulière qui branchée à sa sortie rend son impédance d'entrée égale à Z_c.*

Montrer que l'impédance caractéristique d'un tel quadripôle est valeur propre de la matrice impédance de ce quadripôle.

Solution proposée. La définition de l'impédance caractéristique nous conduit vers la figure suivante :

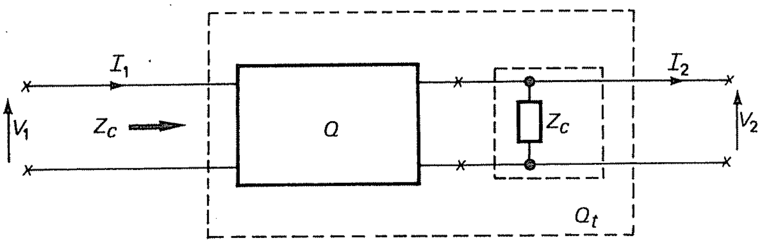


FIG. 11.16

Désignons par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice de transfert du quadripôle Q considéré seul, et par

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_c & 1 \end{pmatrix}.$$

celle de sa charge Z_c.

Étant donné que le quadripôle résultant Q_T est constitué par une association en cascade, la matrice de transfert de l'ensemble est égale à

$$A_T = A\,A_c = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}/Z_c & a_{12} \\ a_{21}+a_{22}/Z_c & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ce qui correspond au système linéaire suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} V_1 = (a_{11}+a_{12}/Z_c)\;V_2 + a_{12}I_2 \\ I_1 = (a_{21}+a_{22}/Z_c)\;V_2 + a_{22}I_2\,. \end{cases}$$

Étant donné que le courant de sortie I_2 est nul, l'impédance d'entrée du quadripôle s'obtient par le rapport

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \frac{a_{11}Z_c+a_{12}}{a_{21}Z_c+a_{22}} = Z_c\,.$$

Ce qui nous conduit au trinôme du second degré en Z_c :

$$Z_c^2 a_{21} + Z_c(a_{22}-a_{11}) - a_{12} = 0 \tag{1}$$

dont la solution positive est par définition l'impédance caractéristique cherchée.

Calculons maintenant la matrice impédance, notée Z, du quadripôle Q. Le tableau des relations entre les paramètres d'un quadripôle nous donne directement

$$Z = \begin{pmatrix} a_{11}/a_{21} & -\Delta_a/a_{21} \\ 1/a_{21} & -a_{22}/a_{21} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \Delta_a = \text{Det } A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\,.$$

Cherchons les valeurs propres, notées λ, de cette matrice Z. Il vient :

$$\operatorname{Det}(Z-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}/a_{21}-\lambda & -\Delta_a/a_{21} \\ 1/a_{21} & -a_{22}/a_{21}-\lambda \end{vmatrix}=P(\lambda),$$

où P représente le polynôme caractéristique de la matrice Z.

Les valeurs propres cherchées sont les racines de l'équation caractéristique $P(\lambda)=0$.

Or,

$$P(\lambda)=\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}-\lambda\right)\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}-\lambda\right)+\frac{\Delta_a}{a_{21}a_{21}},$$

d'où

$$(a_{11}-a_{21}\lambda)\,(-a_{22}-a_{21}\lambda)+\Delta_a=0,$$

c'est-à-dire :

$$a_{21}\lambda^2+(a_{22}-a_{11})\,\lambda-a_{12}=0\,. \tag{2}$$

En comparant les équations (1) et (2), on constate qu'elles ont mêmes racines. Par conséquent, pour déterminer les impédances caractéristiques d'un quadripôle linéaire passif et symétrique, il suffit de calculer les valeurs propres de sa matrice impédance.

L'équation (2) possède bien entendu deux racines, mais il faudra rejeter la racine négative car physiquement $Z_c>0$ et, de ce fait, seule la racine positive a un sens.

Exercice 2. *En appliquant les résultats de l'exercice précédent, calculer l'impédance caractéristique des deux quadripôles linéaires de la figure* 11.17.

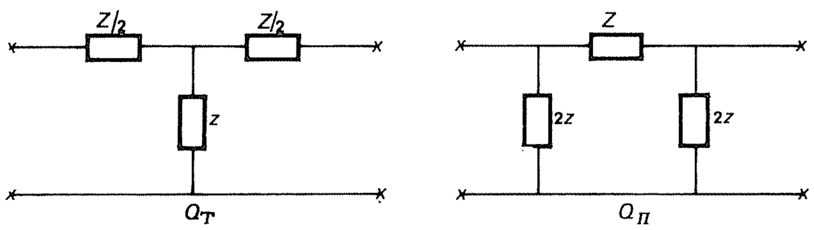


FIG. 11.17

Solution proposée. Nous avons déjà établi dans l'exemple 1 du n° 11.4 la matrice impédance du premier quadripôle Q_T. Il suffit donc de faire $Z_1=Z/2$ et $Z_3=z$

dans ce résultat pour écrire directement la matrice cherchée :

$$Z_T = \begin{pmatrix} (Z/2+z) & -z \\ z & -(Z/2+z) \end{pmatrix}.$$

Calculons les valeurs propres de cette matrice :

$$\mathrm{Det}(Z_T - \lambda I) = P(\lambda) = \begin{vmatrix} Z/2+z-\lambda & -z \\ z & -(Z/2+z)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (Z/2)^2 - Zz = 0$$

dont la racine positive est

$$\boxed{\lambda = \sqrt{(Z/2)^2 + Zz} = Z_{cT}}$$

Ce qui correspond bien à l'impédance caractéristique, notée Z_{cT}, d'un quadripôle « en T symétrique ». Si on pose $Zz = P$ et $Z/z = Q$, nous pouvons également écrire

$$Z_{cT} = \sqrt{P}\sqrt{1+Q/4}\,.$$

Dans le cas du second quadripôle Q_Π proposé il nous faut établir pour commencer sa matrice impédance. Connaissant les matrices de transfert des impédances constituant Q_Π nous écrirons sa matrice de transfert globale :

$$A_\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2z & 1 \end{pmatrix}.$$

Si nous posons pour simplifier l'écriture $2z = 1/y$, ce produit matriciel effectué dans l'ordre est égal à :

$$A_\Pi = \begin{pmatrix} 1+Zy & Z \\ y^2Z+2y & 1+Zy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Le tableau des relations entre les paramètres donne :

$$Z_\Pi = \begin{pmatrix} a_{11}/a_{21} & -\Delta_a/a_{21} \\ 1/a_{21} & -a_{22}/a_{21} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \Delta_a = (1+Zy)^2 - Z(y^2Z+2y) = 1\,;$$

par suite :

$$Z_\Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{1+yZ}{y^2Z+2y} & -\dfrac{1}{y^2Z+2y} \\ \dfrac{1}{y^2Z+2y} & -\dfrac{1+yZ}{y^2Z+2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier la notation, posons les éléments respectifs de cette matrice Z_Π égaux à α et β. Calculons les racines du polynôme caractéristique ainsi simplifié :

$$P(\lambda) = \mathrm{Det}(Z_\Pi - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & -\beta \\ \beta & -\alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(-\alpha-\lambda)+\beta^2 = 0,$$

soit

$$P(\lambda) = \lambda^2-\alpha^2+\beta^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2},$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1+yZ}{y^2Z+2y} \\ \beta &= \frac{1}{y^2Z+2y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\alpha^2-\beta^2) = \frac{Z}{y(yZ+2)} .$$

De telle sorte que

$$Z_{c\Pi} = +\lambda = \sqrt{\frac{Z}{y(yZ+2)}} = \sqrt{\frac{(Zz)^2}{zZ+Z^2/4}},$$

puisque $y = 1/2z$ et enfin :

$$\boxed{Z_{c\Pi} = \frac{Zz}{\sqrt{(Z/2)^2+Zz}} = \frac{Zz}{Z_{cT}}}$$

Ce qui correspond à l'impédance caractéristique d'un quadripôle « en Π » symétrique.

Exercice 3. *On considère le circuit passif linéaire de la figure* 11.18 *travaillant en régime sinusoïdal établi.*

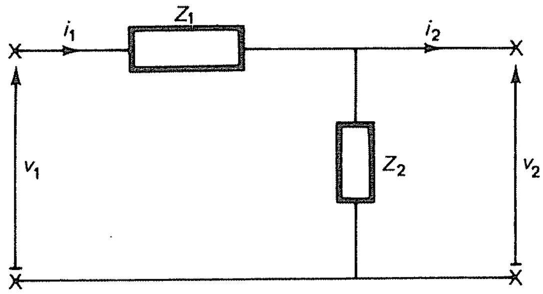


FIG. 11.18

1° *Calculer la matrice de transfert A de ce quadripôle.*

2° *Dans le cas particulier où $Z_1 = Z_2$, calculer les valeurs propres λ_i de l'endomorphisme f associée à la matrice impédance **Z** du quadripôle.*

. 3° *Trouver une matrice diagonale Z' semblable à Z.*

4° *Montrer que λ_i est égale à l'impédance d'entrée Z_e du quadripôle lorsque ce dernier est chargé à la sortie par une impédance égale à Z_e.*

5° *Z_1 est constituée par une résistance R et Z_2 par une simple capacité C. Dans ces conditions, on associe en cascade trois quadripôles identiques ainsi constitués. Calculer la matrice de transfert A_3 de cette association.*

6° *Déduire de la matrice A_3 la pulsation particulière ω_0 pour laquelle, en régime sinusoïdal, la tension de sortie est en opposition de phase avec la tension d'entrée.*

Solution proposée. 1° Le quadripôle est constitué par une association en cascade de deux quadripôles élémentaires dont les matrices de transfert respectives ont déjà été calculées.

Par conséquent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2° Si on fait $Z_1 = Z_2 = Z$, alors

$$A = \begin{pmatrix} 2 & Z \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} a_{11}/a_{21} & -\Delta_a/a_{21} \\ 1/a_{21} & -a_{22}/a_{21} \end{pmatrix} = Z\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$\Delta_a = 2-1 = 1$. Les valeurs propres λ_i de f liée à $\boldsymbol{Z}$ se déduisent de $P(\lambda) = \mathrm{Det}(\boldsymbol{Z} - \lambda I) = 0$ c'est-à-dire :

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{Z} - \lambda I) = \begin{vmatrix} (2Z-\lambda) & -Z \\ Z & -(Z+\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - Z\lambda - Z^2 = 0.$$

Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique, nous obtenons

$$\lambda_i = Z\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

3° Ces valeurs propres sont distinctes, par conséquent, les vecteurs propres sont linéairement indépendants et, de ce fait, $\boldsymbol{Z}$ est diagonalisable, et

$$\boldsymbol{Z}' = \begin{pmatrix} \frac{Z}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{Z}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

4° Calculons l'impédance d'entrée du quadripôle lorsqu'il est chargé par Z_e. Pour cela, cherchons la matrice de transfert A_c du quadripôle chargé. Soit

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & Z \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_e & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+Z/Z_e & Z \\ 1/Z+1/Z_e & 1 \end{pmatrix}.$$

A_c est associée au système linéaire :

$$\begin{aligned} v_1 &= (2+Z/Z_e)\, v_2' + Z i_2' \\ i_1 &= (1/Z+1/Z_e)\, v_2' + i_2', \end{aligned}$$

dans lequel le courant de sortie est nul : $i_2' = 0$

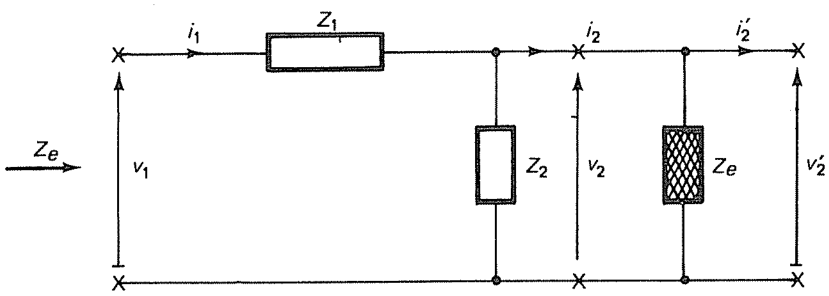


FIG. 11.19

Par suite, l'impédance d'entrée Z_e cherchée s'écrit :

$$Z_e = \frac{v_1}{i_1} = \frac{2+Z/Z_e}{1/Z+1/Z_e},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{Z_e}{Z} + 1 = 2 + \frac{Z}{Z_e} \Rightarrow Z_e^2 - ZZ_e - Z^2 = 0.$$

En comparant ce trinôme au polynôme caractéristique P précédent nous, voyons qu'ils ont mêmes racines, et $\lambda_i = Z_e$. Cette impédance d'entrée particulière est appelée « impédance itérative » du quadripôle et peut se calculer en cherchant les valeurs propres de la matrice impédance du quadripôle seul :

$$Z_e = \lambda = Z\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = Z_{\text{itérative}}.$$

Physiquement, la détermination négative de λ_i doit bien entendu être rejetée.

5° $Z_1 = R$ et $Z_2 = 1/jC\omega$, la matrice de transfert du quadripôle s'écrit, si l'on pose $RC\omega = x$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+jRC\omega & R \\ jC\omega & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+jx & R \\ jC\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A^3 = (A.A).A = \begin{pmatrix} (1+jx)^2+jx & R(2+jx) \\ jC\omega(2+jx) & 1+jx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+jx & R \\ jC\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} (1-5x^2)+j(6x-x^3) & R(3-x^2+4jx) \\ jC\omega(3-x^2+4jx) & (1-x^2+3jx) \end{pmatrix}$$

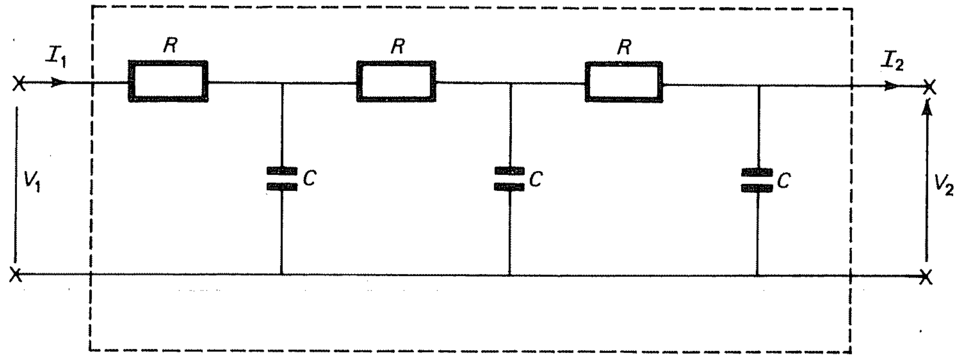


FIG. 11.20

Cette matrice A_3 vérifie l'équation :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

et puisque $I_2 = 0$, le rapport

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{(1-5x^2)+j(6x-x^3)}$$

représente la fonction de transfert du circuit dont le module $|V_2/V_1|$ représente l'atténuation

$$\left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-5x^2)^2+(6x-x^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^6+13x^4+26x^2+1}}.$$

6° Pour que la tension de sortie V_2 soit en opposition phase avec la tension d'entrée V_1 il faut que $\text{Im}(V_2/V_1) = 0$, ce qui implique : $(6x-x^3) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{x_0 = \sqrt{6}}$$

qui est la seule valeur physiquement possible.

Dans ces conditions, l'atténuation de la cellule devient :

$$\left|\frac{V_2}{V_1}(x_0)\right| = \frac{1}{29}; \qquad \text{si} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}.$$

Ce qui signifie que la tension de sortie est 29 fois inférieure à la tension d'entrée lorsque le déphasage apporté par la cellule est π.

Cette propriété est utilisée en électronique pour réaliser des oscillateurs sinusoïdaux. La cellule précédente est alors désignée sous le nom de « cellule phase shift ». Toutefois, pour des raisons technologiques on préfère souvent utiliser la disposition inverse des éléments de la cellule; c'est-à-dire : $Z_1 = 1/jC\omega$ et $Z_2 = R$. Nous laissons aux soins du lecteur d'effectuer les mêmes calculs dans le cas d'une « cellule phase shift » du type inverse.

Nous indiquons simplement que dans le cas général l'élément a_{11} de la matrice de transfert A_3 d'une cellule « phase shift » est égal à :

$$\frac{1}{a_{11}} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{(Z_1/Z_2)^3 + 5(Z_1/Z_2)^2 + 6(Z_1/Z_2) + 1},$$

de telle sorte que, si nous posons $Z_1/Z_2 = K$, il vient :

$$a_{11} = K^3 + 5K^2 + 6K + 1,$$

valable pour tout nombre complexe K.

Exercice 4. *On considère le circuit linéaire de la figure* 11.21 *appelé « cellule de Wien » en régime sinusoïdal.*

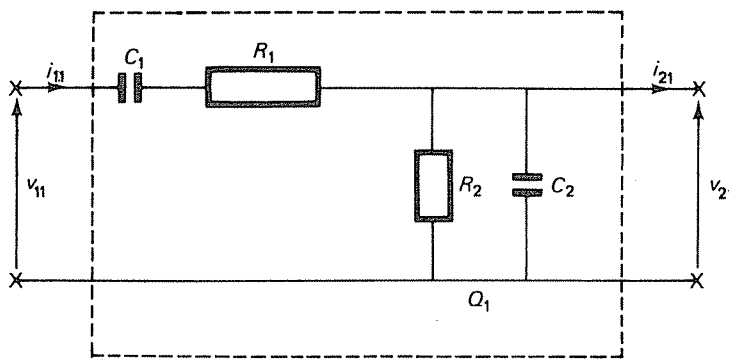


FIG. 11.21

1° *Calculer la matrice de transfert A_1 de ce quadripôle Q_1.*

2° *On fait $R_1 = R_2 = R$ et $C_1 = C_2 = C$. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points P, images du nombre complexe v_{21}/v_{11} lorsque la pulsation ω de la source d'entrée prend toutes les valeurs physiquement possibles. En déduire les variations du déphasage φ entre les tensions d'entrée et sortie du quadripôle.*

3° *On considère un second quadripôle Q_2 conforme à la figure* 11.22. *Trouver les conditions physiquement réalisables pour que la tension de sortie V_2 de l'association imposée ci-dessous (Fig.* 11.23) *des quadripôles Q_1 et Q_2 soit nulle.*

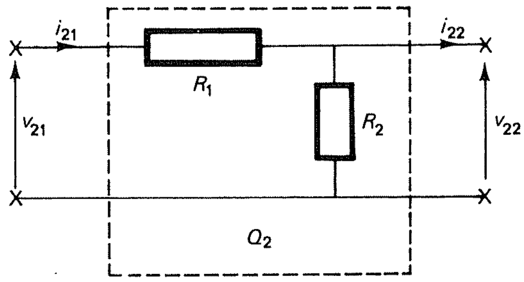


FIG. 11.22

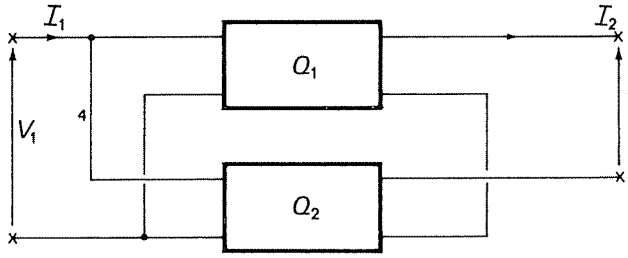
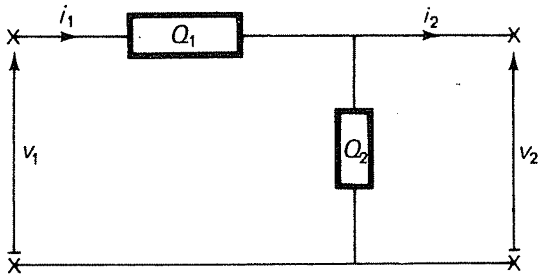


FIG. 11.23

Ce dernier montage est connu sous le nom de *pont de Wien.*

1° Il s'agit-là d'une association en cascade de quatre quadripôles élémentaires et nous pourrions calculer A_1 en effectuant le produit matriciel dans l'ordre de chacun des quadripôles élémentaires. Toutefois, nous avons calculé dans l'exercice précédent la matrice A d'une structure en L et il est peut être plus rapide de remplacer Z_1 et Z_2 par leurs valeurs respectives. En effet, nous avions



$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 11.24

avec, dans ce cas :

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}$$

d'où la matrice A_1 cherchée :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{(1+jR_1C_1\omega)(1+jR_2C_2\omega)}{jR_2C_1\omega} & \dfrac{1+jR_1C_1\omega}{jC_1\omega} \\ \dfrac{1+jR_2C_2\omega}{R_2} & 1 \end{pmatrix}$$

2° Si les résistances et les capacités sont deux à deux identiques, la matrice précédente s'écrit, si $x = RC\omega$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3+j(x-1/x) & \dfrac{1}{jC\omega}+R \\ \dfrac{1}{R}+jC\omega & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $i_{21} = 0$ la fonction de transfert de la cellule de Wien considerée seule a pour expression :

$$\frac{v_{21}}{v_{11}} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{3+j(x-1/x)} \, .$$

Pour trouver l'équation de la courbe Γ que forme dans le plan complexe l'ensemble des points P images de v_{21}/v_{11}, posons $h = (x-1/x)$ et considérons le rapport inverse :

$$v_{11}/v_{21} = 3+jh ,$$

dont la représentation dans le plan complexe est immédiate. En effet, si nous désignons par M les points images de v_{11}/v_{21}, ces derniers sont situés sur la droite verticale Δ qui coupe l'axe des réels en (3,0).

Sachant que l'inverse d'une droite de ce type dans le plan complexe est un cercle centré sur l'axe des réels, tangent à l'origine et de diamètre 1/3, nous obtenons très simplement la courbe Γ cherchée. Précisons l'intervalle de variation de la variable ω.

Si $\omega \in [0, +\infty[$ alors $x \in [0, +\infty[$, ou encore $h \in]-\infty, +\infty[$

et dans ces conditions $P \in \Gamma$, dont l'équation est

$$Y^2+X^2-X/3 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Y^2+(X-1/6)^2 = 1/36$$

ce qui correspond bien à un cercle Γ de rayon $1/6$ centré sur $X_0 = 1/6$; avec

$$X = \frac{3}{9+h^2} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{-h}{9+h^2}$$

Lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ les points P et M se déplacent respectivement sur les courbes Γ et Δ suivant le sens des flèches.

$$\overline{OP} = \left|\frac{v_{21}}{v_{11}}\right| = \frac{1}{\sqrt{9+(x-1/x)^2}}$$

$$\varphi = \text{Arc tg}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right]$$

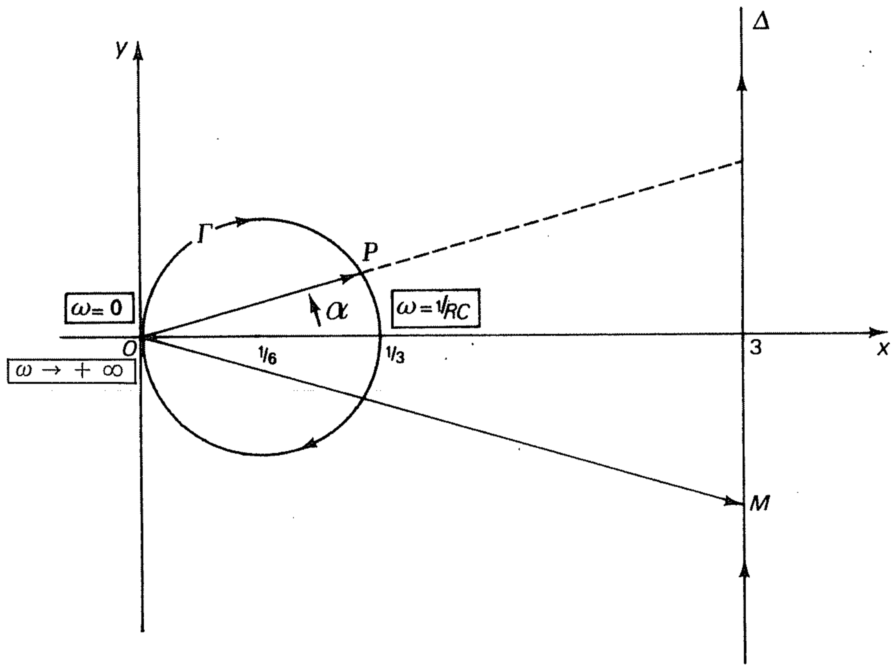


FIG. 11.25

En interprétant le déplacement du point P sur Γ en fonction de x (ou ω) nous pouvons déduire directement et sans calculs les courbes représentatives de $|v_{21}/v_{11}|$; c'est-à-dire des variations de la longueur du vecteur $\boldsymbol{OP}$ et celle du déphasage φ entre les tensions d'entrée et de sortie du quadripôle.

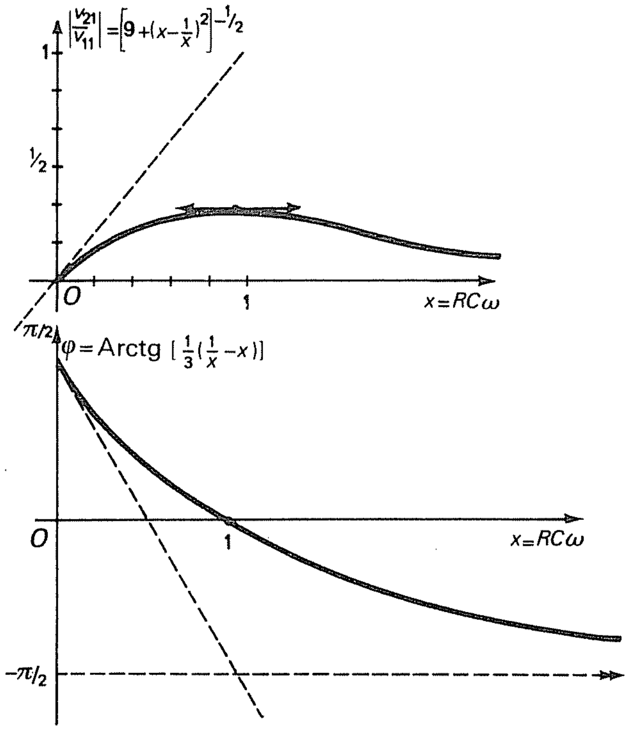
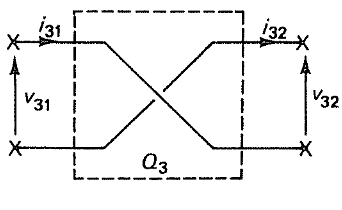


FIG. 11.26

3° La matrice de transfert A_2 du quadripôle Q_2 est égale à :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1+R_1/R_2 & R_1 \\ 1/R_2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q_2 .$$

Pour ramener l'association imposée vers une des formes connues il est nécessaire d'introduire un quadripôle « inverseur » Q_3 dont la matrice de transfert est immédiate :



$$\Leftrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

FIG. 11.27

Remarquons en passant que Q_3 a pour matrice de transfert la matrice unité I changée de signe. Désignons alors par Q_2' le quadripôle suivant :

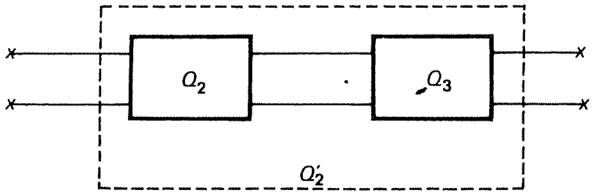


FIG. 11.28

dont la matrice de transfert est $A_2' = A_2 A_3 = -A_2$.

L'association demandée peut maintenant être représentée par la figure 11.29.

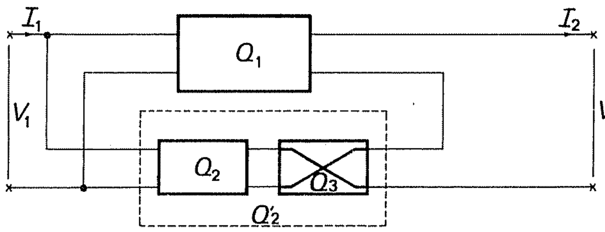


FIG. 11.29

Ce qui correspond à une association du type « parallèle-série » dont la matrice hybride inverse G_T est égale à la somme des matrices hybrides G_i individuelles. Soit

$$G_T = G_1 + G_2'.$$

Il reste maintenant à calculer G_1 et G_2'. Pour cela, rappelons que, d'après le tableau des relations entre les paramètres :

$$G = \begin{pmatrix} a_{21}/a_{11} & \Delta_a/a_{11} \\ 1/a_{11} & -a_{12}/a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne les matrices cherchées en adaptant ces matrices aux éléments de A_1 et A_2'.

$$G_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1/R + \mathrm{j}C\omega}{3+\mathrm{j}(x-1/x)} & \dfrac{1}{3+\mathrm{j}(x-1/x)} \\ \dfrac{1}{3+\mathrm{j}(x-1/x)} & \dfrac{-(R+1/\mathrm{j}C\omega)}{3+\mathrm{j}(x-1/x)} \end{pmatrix} \quad \text{avec ici } \Delta_a = 1\,.$$

De même :

$$G_2' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_1+R_2} & \dfrac{-R_2}{R_1+R_2} \\ \dfrac{-R_2}{R_1+R_2} & \dfrac{-R_1R_2}{R_1+R_2} \end{pmatrix} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\begin{pmatrix} 1/R_2 & -1 \\ -1 & -R_1 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$G_T = \begin{pmatrix} \dfrac{1/R+\mathrm{j}C\omega}{3+\mathrm{j}(x-1/x)}+\dfrac{1}{R_1+R_2} & \dfrac{1}{3+\mathrm{j}(x-1/x)}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} \\ \dfrac{1}{3+\mathrm{j}(x-1/x)}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & \dfrac{-R_1R_2}{R_1+R_2}-\dfrac{R+1/\mathrm{j}C\omega}{3+\mathrm{j}(x-1/x)} \end{pmatrix}$$

d'où le système linéaire associé à cette matrice :

$$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1+g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1+g_{22}I_2 \end{cases} \quad \text{avec } G_T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme $I_2 = 0$ la condition qui rend V_2 nulle est :

$$g_{21} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3+\mathrm{j}(x-1/x)} - \frac{R_2}{R_1+R_2} = 0,$$

c'est-à-dire $\mathrm{Re}(g_{21}) = 0$ et $\mathrm{Im}(g_{21}) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x-1/x}{9+(x-1/x)^2} = 0 \\ &\frac{3}{9+(x-1/x)^2} - \frac{R_2}{R_1+R_2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x = 1,\ \text{soit } \boxed{\omega = 1/RC} \\ &\text{et} \\ &\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{1}{3},\ \text{soit } \boxed{R_1 = 2R_2} \end{aligned}$$

Ce qui signifie physiquement que si la pulsation ω de la source de tension V_1 d'entrée est égale à $1/RC$ et si $R_1 = 2R_2$, alors la tension de sortie V_2 est nulle. Cette association de quadripôles correspond en fait au montage suivant où nous reconnaissons bien entendu le circuit traditionnel appelé « pont de Wien » dont les propriétés précédentes sont utilisées en pratique pour réaliser des oscillateurs, des distortiomètres, des mesures de capacité, etc.

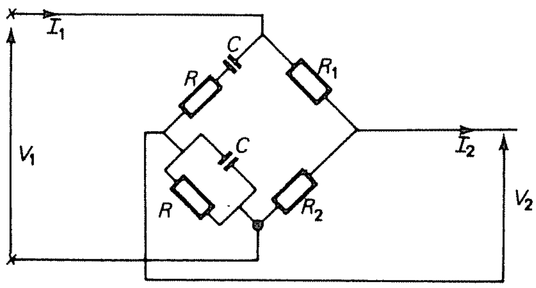


FIG. 11.30

Exercice **5.** *On considère le circuit dit « en double T », constitué par des composants linéaires, attaqué en régime sinusoïdal établi* (Fig. 11.31).

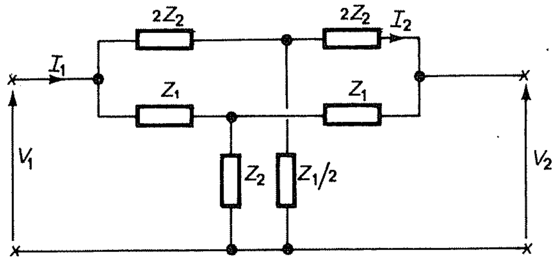


FIG. 11.31

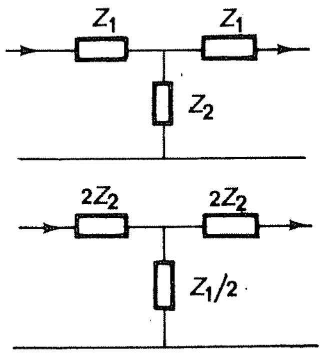
1° *Déterminer, en utilisant le calcul matriciel, le rapport* V_2/V_1.

2° *Application : Si* $Z_1 = 1/\mathrm{j}C\omega$ *et* $Z_2 = R/2$ *tracer dans le plan complexe la courbe* Γ *sur laquelle sont situés les points P images du nombre complexe* V_2/V_1 *lorsque la pulsation* ω *de la source d'entrée prend toutes les valeurs physiquement possibles.*

3° *Calculer l'impédance d'entrée* Z_e *du montage, c'est-à-dire celle que voit la source de tension* V_1.

Solution proposée. 1° Il s'agit là d'une association du type « parallèle-parallèle » de deux quadripôles élémentaires « en T ». Il est de ce fait possible de calculer la matrice admittance Y du « double T » en faisant la somme des matrices admittances individuelles. Nous avons déjà déterminé la matrice impédance d'un quadripôle en T.

Soit :



$$\Leftrightarrow \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -(Z_1+Z_2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{Z_1+4Z_2}{2} & -Z_1/2 \\ Z_1/2 & -\dfrac{Z_1+4Z_2}{2} \end{pmatrix}$$

FIG. 11.32

Pour connaître les matrices admittances respectives il suffit de calculer les matrices inverses de $\mathbf{Z}_1$ et de $\mathbf{Z}_2$.

En appliquant la règle de calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre 2, il vient:
vient :

$$Y_1 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} -(Z_1+Z_2) & Z_2 \\ -Z_2 & Z_1+Z_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \Delta_1 = -Z_1(Z_1+2Z_2)$$

$$Y_2 = \frac{1}{\Delta_2}\begin{pmatrix} -\dfrac{Z_1+4Z_2}{2} & Z_1/2 \\ -Z_1/2 & \dfrac{Z_1+4Z_2}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \Delta_2 = -2Z_2(Z_1+2Z_2)$$

En désignant par $Y = Y_1 + Y_2$ la matrice admittance du « double T » cherchée telle que

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

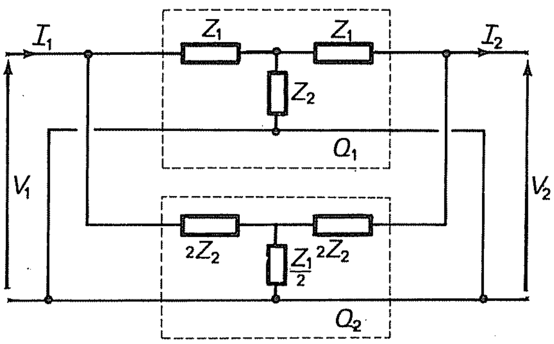


FIG. 11.33

avec

$$y_{11} = \frac{Z_1+Z_2}{Z_1(Z_1+2Z_2)} + \frac{Z_1+4Z_2}{4Z_2(Z_1+2Z_2)} = \frac{4Z_1Z_2+(Z_1+2Z_2)^2}{4Z_1Z_2(Z_1+2Z_2)} = -y_{22},$$

$$y_{21} = \frac{Z_2}{Z_1(Z_1+2Z_2)} + \frac{Z_1}{4Z_2(Z_1+2Z_2)} = \frac{Z_1^2+4Z_2^2}{4Z_1Z_2(Z_1+2Z_2)} = -y_{12}.$$

Comme $I_2 \doteq 0$, l'équation $I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 = 0$ nous donne la transmittance (ou fonction de transfert) :

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{Z_1^2+4Z_2^2}{4Z_1Z_2+(Z_1+2Z_2)^2}}\,.$$

2° Si Z_1 est constituée par une capacité C et Z_2 par une résistance pure égale à $R/2$ le rapport précédent est égal à :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R^2C^2\omega^2-1}{R^2C^2\omega^2-1-4jRC\omega} = \frac{1}{1-j\,\dfrac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2-1}}.$$

Posons $RC\omega = x$:

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1+j\,\dfrac{4}{(1/x-x)}}}.$$

Pour situer l'ensemble des points P images de V_2/V_1 en fonction de ω, effectuons le changement de variable réelle

$$h = \frac{4}{1/x-x} = \frac{-4x}{x^2-1}.$$

Comme $\omega \in [0, +\infty[$, $x \in [0, +\infty[$ et $h \in]-\infty, +\infty[$, toutefois pour $x=1$, h présente une discontinuité et la courbe représentative de la fonction h s'obtient rapidement :

$$h'(x) = 4\,\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Cette dérivée est positive pour tout x.

x	0		1/2		1			2		$+\infty$
h	0	↗	8/3	↗	$+\infty$ ‖	$-\infty$	↗	$-8/3$	↗	0

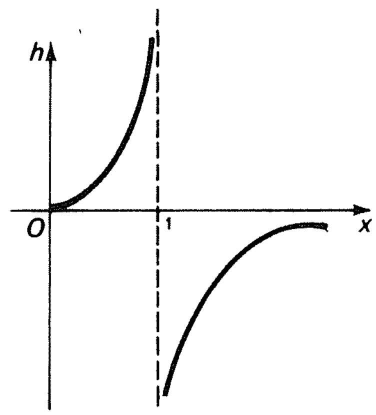


FIG. 11.34

Ces résultats nous serviront à la détermination du sens de déplacement du point P sur Γ en fonction de ω.

$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}h} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = 1+\mathrm{j}h$ dont la courbe représentative dans le plan complexe est une droite Δ parallèle à l'axe imaginaire. Par conséquent Γ est un cercle. Pour le montrer écrivons :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1-\mathrm{j}h}{1+h^2} = \frac{1}{1+h^2} + \mathrm{j}\,\frac{-h}{1+h^2} \equiv X + \mathrm{j}Y,$$

où X et Y sont réels. Identifions $X = 1/(1+h^2)$ et $Y = -h/(1+h^2)$, donc $Y/X = -h$.

Remplaçons cette valeur de h dans X ou Y; il vient :

$$X = \frac{1}{1+(Y/X)^2} \Rightarrow X^2 + Y^2 - X = 0,$$

ce qui correspond à l'équation de la courbe Γ cherchée dans le plan complexe, et nous reconnaissons bien là l'équation d'un cercle car on peut également écrire :

$$\Gamma : X^2 + Y^2 - X = 0 \Rightarrow \boxed{Y^2 + (X-1/2)^2 = 1/4} \text{ C.Q.F.D.}$$

La représentation de ce cercle ne pose aucun problème, seule la détermination des valeurs de ω correspondant à chaque point P de Γ nécessite un peu de réflexion et la courbe de h précédemment tracée nous aidera à obtenir la courbe Γ cherchée qui est conforme à la figure 10.35.

$$\omega_0 = 1/RC$$

Le sens des flèches indique le sens du déplacement des points P de Γ et M de Δ en fonction de ω.

Γ est la courbe sur laquelle se déplacent les points P images de V_2/V_1.

Δ est la droite sur laquelle se déplacent les points M images de V_1/V_2.

3° Pour connaître l'impédance d'entrée du montage il suffit de calculer le rapport

$$Z_e = V_1/I_1.$$

La première ligne de la matrice impédance correspond à l'équation

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

et comme $I_2 = 0$ nous obtenons directement : $Z_e = z_{11}$. Il est donc possible en inversant la matrice Y de calculer z_{11}. Soit :

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow Y^{-1} = \frac{1}{\Delta_Y}\begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix}.$$

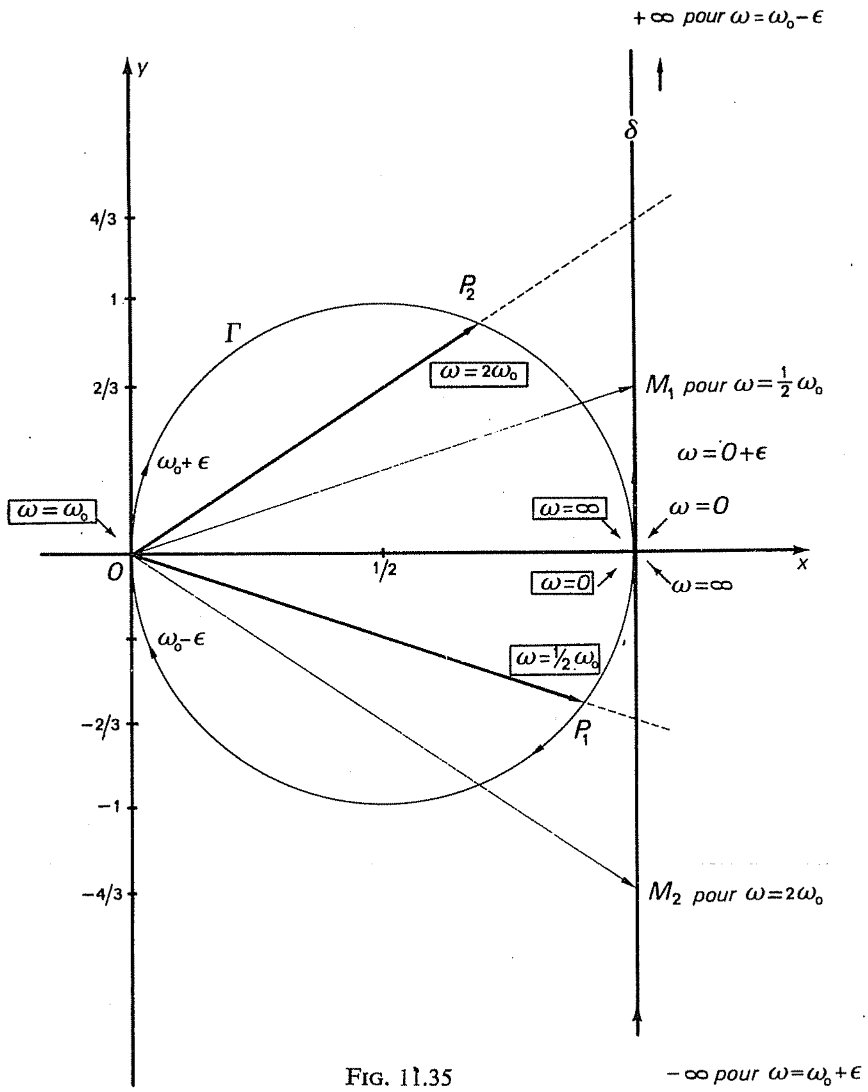


FIG. 11.35

avec $\Delta_Y = y_{11}y'_{22} - y_{12}y_{21} = y_{21}^2 - y_{11}^2$ ici; c'est-à-dire en fonction des valeurs précédemment calculées :

$$\Delta_Y = \frac{[4Z_2^2+Z_1^2]^2 - [4Z_1Z_2 + (Z_1+2Z_2)^2]^2}{[4Z_1Z_2(Z_1+2Z_2)]^2} = -\frac{1}{Z_1Z_2}.$$

Par conséquent :

$$\boldsymbol{Z} = Z_1Z_2\begin{pmatrix} -y_{22} & y_{12} \\ y_{21} & -y_{11} \end{pmatrix}$$

et

$$V_1 = -Z_1 Z_2 y_{22} I_1 + Z_1 Z_2 y_{12} I_2, \qquad \text{avec } z_{11} = -Z_1 Z_2 y_{22},$$

d'où

$$Z_e = -Z_1 Z_2 y_{22} = Z_1 Z_2 y_{11}.$$

L'impédance d'entrée du montage en « double T » est égale à

$$\boxed{Z_e = \frac{4Z_1Z_2 + (Z_1 + 2Z_2)^2}{4(Z_1 + 2Z_2)}}.$$

Dans le cas particulier de notre application :

$$4Z_1Z_2 = \frac{2R}{jC\omega}; \qquad (Z_1 + 2Z_2) = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jx}{jC\omega}$$

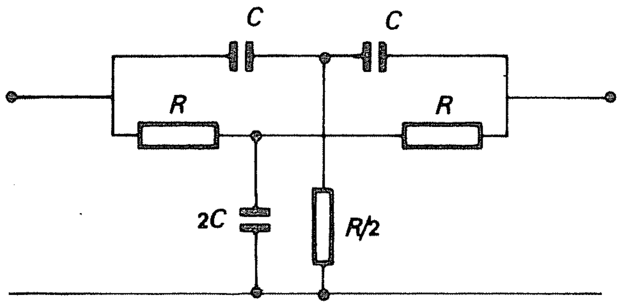


FIG. 11.36

et l'impédance d'entrée après calculs s'écrit :

$$Z_e = \frac{R}{4}\left(\frac{3+x^2}{1+x^2} - j\,\frac{3x^2+1}{x(1+x^2)}\right)$$

dont le module est

$$|Z_e| = \frac{R}{4}\sqrt{\frac{x^4 + 14x^2 + 1}{x^2(1+x^2)}}$$

et l'argument

$$\varphi = \text{Arc tg} - \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)}.$$

Remarquons que si $\omega = 1/RC$, $x = 1$, le module de l'impédance d'entrée est égal à $R/\sqrt{2}$ et l'argument est de $-\pi/4$.

Exercice 6. *On considère un transistor branché en « émetteur commun » dont les caractéristiques sont connues par les éléments h_{ij} de sa matrice hybride H et fournies par le constructeur.*

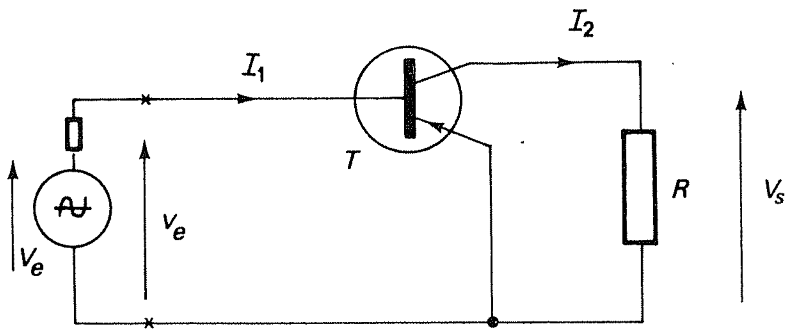


FIG. 11.37

On suppose que le transistor T travaille en basse fréquence et régime linéaire. On désignera par :

R la résistance de charge du transistor;

ρ la résistance interne du générateur délivrant un signal sinusoïdal d'amplitude V_e.

Déterminer, à l'aide du calcul matriciel :

1° *le gain composite noté $g_{vc} = V_s/V_e$;*
2° *le gain en tension du transistor $g_v = V_s/v_e$;*
3° *le gain en puissance g_p;*
4° *la résistance de sortie Z_s;*
5° *la résistance d'entrée Z_e.*

Solution proposée. 1° Le circuit à étudier correspond à une association en cascade de trois quadripôles linéaires Q_1, Q_2, Q_3.

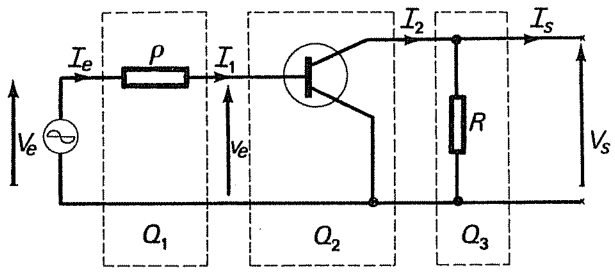


FIG. 11.38

Pour obtenir le système d'équations linéaires lié à ce circuit il nous faut utiliser les matrices de transfert. Nous avons :

$$\text{pour } Q_1 \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{pour } Q_3 \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/R & 1 \end{pmatrix}$$

Quant au transistor, il est nécessaire de rechercher sa matrice de transfert A_2 à partir de sa matrice H. Compte tenu du sens du courant I_2 nous obtenons :

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{h_{21}} \begin{pmatrix} \Delta_h & h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } Q_2$$

avec $\Delta_h = \text{Det } H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ et la matrice de transfert A du circuit complet s'écrit :

$$A = A_1 A_2 A_3,$$

c'est-à-dire, après avoir effectué ce triple produit matriciel dans l'ordre :

$$A = -\frac{1}{h_{21}} \begin{pmatrix} \Delta_h + \rho h_{22} + (h_{11}+\rho)/R & h_{11}+\rho \\ h_{22}+1/R & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_e = a_{11} V_s + a_{12} I_s \\ I_e = a_{21} V_s + a_{22} I_s \end{cases} \tag{1}$$

Comme ici $I_s = 0$ la première équation du système précédent donne directement l'amplification en tension composite :

$$g_{vc} = V_s/V_e = 1/a_{11} = \frac{-h_{21}}{\Delta_h + \rho h_{22} + (h_{11}+\rho)/R},$$

ce qui peut être mis sous la forme usuelle :

$$\boxed{g_{vc} = \frac{-h_{21}}{(h_{11}+\rho)\,(h_{22}+1/R) - h_{12}h_{21}}}$$

Pour calculer le gain g_v propre au transistor il suffit de considérer le circuit suivant :

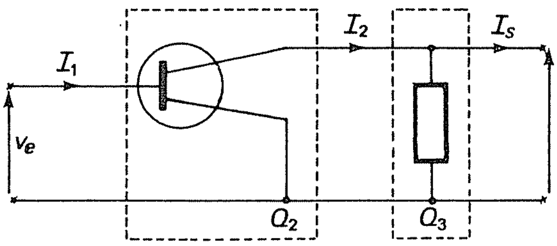


FIG. 11.39

La matrice de transfert A' de ce quadripôle équivalent Q' est donnée par $A' = A_2 A_3$; c'est-à-dire, en tenant compte du sens des courants,

$$A' = -\frac{1}{h_{21}}\begin{pmatrix}\Delta_h & h_{11}\\ h_{22} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1/R & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{h_{21}}\begin{pmatrix}\Delta_h + h_{11}/R & h_{11}\\ h_{22}+1/R & 1\end{pmatrix}$$

et $v_e = a'_{11} V_s + a'_{12} I_s$ nous conduit, puisque $I_s = 0$, vers

$$g_v = V_s/v_e = 1/a'_{11} = \frac{-h_{21}}{\Delta_h + h_{11}/R},$$

soit

$$\boxed{g_v = \frac{-Rh_{21}}{R(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) + h_{11}}}$$

3° Pour le gain en puissance $g_p = g_v g_i$, il est nécessaire de connaître le gain en courant $g_i = I_2/I_1$ du transistor. La deuxième équation liée à la matrice A', soit $I_1 = a'_{21} V_s + a'_{22} I_s$ dans laquelle il est possible de remplacer V_s par RI_2 et I_s par 0 permet d'obtenir : $I_1 = a'_{21} RI_2$, donc

$$\frac{I_2}{I} = \frac{1}{Ra'_{21}} = -\frac{h_{21}}{1+Rh_{22}}$$

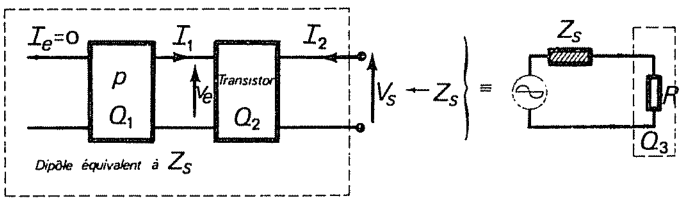
et

$$g_p = \frac{h_{21}^2 R}{(R\Delta_h + h_{11})(1+Rh_{22})}$$

ou encore

$$g_p = \frac{h_{21}^2}{(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})(1+Rh_{22}) + h_{11}(1/R + h_{22})}.$$

4° La résistance de sortie est définie par $Z_s = V_s/I_2$, c'est-à-dire celle que verrait un générateur branché à la sortie lorsque l'entrée est fermée sur la résistance ρ du générateur d'entrée (Fig. 10.40).



5

FIG. 11.40

Nous avons dans ce cas une matrice de transfert A'' définie par

$$A'' = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_h & h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{pmatrix} \frac{(-1)}{h_{21}} = \frac{-1}{h_{21}} \begin{pmatrix} \Delta_h & h_{11} \\ \Delta_h/\rho + h_{22} & h_{11}/\rho + 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} v_e \\ I_e \end{pmatrix} = A'' \begin{pmatrix} V_s \\ I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Z_s = \frac{a''_{22}}{a''_{21}} \quad \text{puisque } I_e = 0,$$

soit

$$\boxed{Z_s = \frac{h_{11}+\rho}{h_{22}(\rho+h_{11}) - h_{12}h_{21}}}.$$

Il est possible d'obtenir ce même résultat à partir de la matrice impédance Z'' correspondant à A'' :

$$Z'' = \frac{1}{a''_{21}} \begin{pmatrix} a''_{11} & \Delta''_a \\ 1 & a''_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow Z_s = \frac{a''_{22}}{a''_{21}} = \frac{h_{11}+\rho}{\Delta_h + \rho h_{22}},$$

ce qui conduit bien au même résultat.

5° La résistance d'entrée Z_e du montage est constituée par le dipôle équivalent de la figure 10.41 :

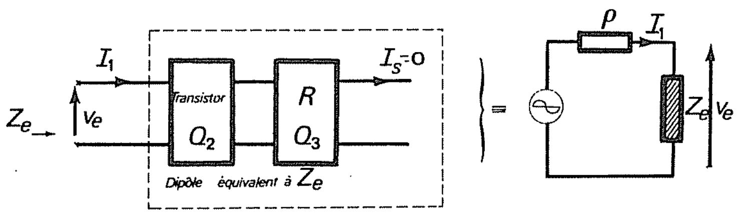


FIG. 11.41

Reprenons la matrice A' déjà calculée en 2°. Si nous faisons $I_s = 0$, le quotient des équations

$$\begin{aligned} v_e &= a'_{11} V_s + a'_{12} I_s \\ I_1 &= a'_{21} V_s + a'_{22} I_s \end{aligned}$$

liées à A' nous donne

$$Z_e = \frac{v_e}{I_1} = \frac{a'_{11}}{a'_{21}} = \frac{\Delta_h + h_{11}/R}{h_{22} + 1/R};$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{Z_e = h_{11} - \frac{Rh_{12}h_{21}}{1+Rh_{22}}}\,.$$

Les résultats précédents permettent d'assimiler le circuit proposé à un seul quadripôle Q ayant Z_e pour résistance d'entrée et Z_s pour résistance de sortie; c'est-à-dire équivalent au circuit de la figure 10.42.

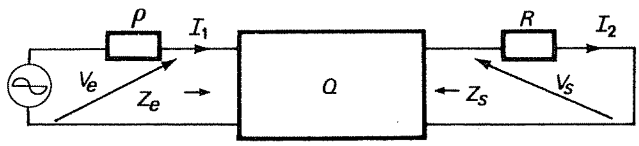


FIG. 11.42

Nous vérifions bien alors que

$$g_v = \frac{V_s}{v_e} = \frac{RI_2}{Z_e I_1} = \frac{R}{Z_e}\, g_i,$$

c'est-à-dire

$$g_v = \frac{-Rh_{21}}{h_{11}+R\Delta_h}.$$

CHAPITRE 12

GÉOMETRIE EUCLIDIENNE

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques notions fondamentales en physique : produit scalaire, produit mixte, produit vectoriel. Comme, en physique, il n'y a pas de système d'axes privilégié, nous donnerons des définitions *intrinsèques*, c'est-à-dire en dehors de tout choix d'axes de coordonnées.

12.1 Produit scalaire. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. On appelle *produit scalaire* sur E une forme bilinéaire symétrique (voir tome 1), notée $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$, telle que

a) pour tout vecteur $\boldsymbol{a}$ de E, le nombre réel $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$ soit positif;

b) le nombre réel $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$ soit nul si et seulement si le vecteur $\boldsymbol{a}$ est nul.

L'espace vectoriel E, muni d'un produit scalaire, prend le nom d'*espace vectoriel euclidien.*

EXEMPLES

1. Prenons pour E l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, considéré comme espace vectoriel sur lui-même. L'application

$$(a, b) \mapsto ab$$

de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un produit scalaire. Ainsi, $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel euclidien.

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$. L'application

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto xx'+yy',$$

où $\boldsymbol{a}=(x, y)$ et $\boldsymbol{b}=(x', y')$, est évidemment un produit scalaire; ce produit scalaire est dit canonique.

Comme l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes peut être identifié à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, nous voyons que $\mathbf{C}$ est un plan euclidien.

3. Soit de même l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. L'application

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto xx'+yy'+zz',$$

où $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ et $\boldsymbol{b}=(x', y', z')$, est un produit scalaire, dit canonique.

On notera que la plupart des propriétés des espaces vectoriels euclidiens ne font pas intervenir la notion de dimension.

12.2 Inégalité de Schwarz. *Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour tout couple* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *de vecteurs de E,*

$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})^2 \leqslant (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}). \tag{1}$$

L'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *sont colinéaires.*

Écrivons que, pour tout nombre réel α,

$$(\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}) \geqslant 0.$$

Il vient en développant :

$$(\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha^2(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b})-2\alpha(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} \geqslant 0.$$

Lorsque $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, la relation (1) est évidente. Dans le cas contraire, $\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}$ est différent de 0. Le trinôme du second degré

$$\alpha^2(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b})-2\alpha(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$$

ne pouvant avoir deux racines réelles distinctes, son discriminant est négatif, d'où l'inégalité (1).

Supposons que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ soient colinéaires, et écartons le cas trivial où $\boldsymbol{b}$ est nul. Il existe alors un nombre réel α_0 tel que

$$\boldsymbol{a} = \alpha_0 \boldsymbol{b};$$

alors

$$(\boldsymbol{a}-\alpha_0\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}-\alpha_0\boldsymbol{b}) = 0.$$

Le trinôme

$$\alpha^2(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b})-2\alpha(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$$

admettant une racine réelle, cette racine est double; il y a donc égalité dans l'inégalité de Schwarz.

Réciproquement, si

$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}),$$

il existe un nombre réel α_0 tel que

$$(\boldsymbol{a}-\alpha_0\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}-\alpha_0\boldsymbol{b}) = 0;$$

donc

$$\boldsymbol{a}-\alpha_0\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont colinéaires.

12.3 Longueur. Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour tout vecteur $\boldsymbol{a}$ de E, la racine carrée du nombre réel positif $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$ s'appelle *longueur*, ou *norme*, du vecteur $\boldsymbol{a}$ et se note $\|\boldsymbol{a}\|$.

EXEMPLES

1. Dans le cas de **R**, la longueur d'un nombre réel a n'est autre que sa valeur absolue $|a|$.

2. Dans le cas de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$, on retrouve la notion classique de longueur en géométrie. Remarquons que la longueur d'un vecteur (a, b) de $\mathbf{R}^2$ n'est autre que le module $|z|$ du nombre complexe $z = a + jb$.

Avec cette notation, l'inégalité de Schwarz s'écrit

$$|\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\|.$$

Interprétation de l'inégalité de Schwarz. — Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls. Alors

$$-1 \leqslant \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\|} \leqslant 1.$$

Il existe donc un nombre réel α appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ tel que

$$\frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\|} = \alpha;$$

ce nombre α peut être considéré comme le cosinus d'un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$. Alors

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta,$$

ce qu'on exprime sous la forme traditionnelle :

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des longueurs de ces vecteurs et du cosinus de leur angle.

Propriétés de la longueur

Il est immédiat qu'un vecteur de E est nul si et seulement si sa longueur est nulle.

Pour tout vecteur $\boldsymbol{a}$ de E et pour tout nombre réel α,

$$\|\alpha\boldsymbol{a}\| = |\alpha|.\|\boldsymbol{a}\|.$$

En effet, par définition,

$$\|\alpha\boldsymbol{a}\|^2 = (\alpha\boldsymbol{a}).(\alpha\boldsymbol{a}),$$

et, d'après la bilinéarité du produit scalaire,

$$(\alpha\boldsymbol{a}).(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha^2(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}) = \alpha^2\|\boldsymbol{a}\|^2.$$

Pour tout couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *de vecteurs de* E,

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

(*inégalité triangulaire*).

En effet, par définition,

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Or,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+2\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$|\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\|;$$

donc

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \leqslant (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2,$$

ce qu'il fallait prouver.

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *sont colinéaires et de même sens (c'est-à-dire, lorsque* $\boldsymbol{b}$ *est non nul, s'il existe un nombre réel positif* α *tel que* $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$*).*

En effet, l'égalité dans l'inégalité triangulaire a lieu si et seulement si

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\|;$$

or, l'égalité

$$|\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\|$$

a lieu si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont colinéaires. Écartons comme d'habitude le cas trivial où $\boldsymbol{b}$ est nul; alors

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

Enfin, l'égalité

$$|\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b},$$

se traduisant par

$$|\alpha\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}| = \alpha(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b})$$

équivaut à $\alpha \geqslant 0$, puisque $\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}$ est strictement positif.

On dit qu'un vecteur est *unitaire* si sa longueur est égale à 1.

Soit $\boldsymbol{a}$ *un vecteur non nul. Il existe alors un vecteur unitaire* $\boldsymbol{u}$ *et un seul tel que*

$$\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{a},$$

où α *est un nombre réel positif.*

En effet, nécessairement,

$$\|\boldsymbol{u}\| = |\alpha|.\|\boldsymbol{a}\|;$$

d'où

$$|\alpha| = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}.$$

Puisque α est positif, $\alpha = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}$. Le vecteur $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ convient visiblement.

12.4 Distance. Suivant l'usage, nous considérerons souvent les éléments d'un espace vectoriel E comme des points. Le vecteur nul $\boldsymbol{0}$ est alors appelé origine de E et noté O. Un élément $\boldsymbol{a}$ de E pourra indifféremment être considéré comme un point M ou comme un vecteur, auquel cas il sera encore noté $\boldsymbol{OM}$.

Soit E un espace vectoriel euclidien. On appelle *distance* l'application d de $E \times E$ dans $\mathbf{R}_+$ qui à tout couple (A, B) de points de E associe la longueur du vecteur $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA}$:

$$d(A, B) = \|\boldsymbol{AB}\|.$$

Les propriétés de la longueur conduisent immédiatement aux résultats suivants :

Pour que deux points A et B de E soient confondus, il faut et il suffit que

$$d(A, B) = 0.$$

Pour tout couple (A, B) de points de E,

$$d(B, A) = d(A, B).$$

Pour tout triplet (A, B, C) de points de E,

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$$

(*inégalité triangulaire*).

12.5 Orthogonalité. On dit que deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ d'un espace vectoriel euclidien E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul :

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0.$$

La relation d'orthogonalité entre vecteurs de E est symétrique, puisque $\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$.

Pour que deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

(*théorème de Pythagore*).

En effet, pour tout couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de vecteurs de E,

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b};$$

par définition, le dernier terme est nul lorsque $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont orthogonaux.

12.6 Orthogonalité dans les plans euclidiens. Examinons en détail le cas où la dimension de E est égale à 2.

Soit $\boldsymbol{a}$ *un vecteur non nul de E. L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à* $\boldsymbol{a}$ *est une droite, laquelle ne contient pas* $\boldsymbol{a}$.

En effet, cet ensemble est le noyau de la forme linéaire $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}.\boldsymbol{a}$. Cette forme linéaire est non nulle, puisque $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} \neq 0$; son noyau est donc une droite, et $\boldsymbol{a}$ n'appartient pas à cette droite.

On dit qu'une base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de E est *orthonormale*, ou encore que $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ est un repère orthonormal, si les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ sont orthogonaux et unitaires.

On notera réciproquement que si deux vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ de E vérifient les relations

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = 1, \quad \|\boldsymbol{e}_2\| = 1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_2 = 0,$$

les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ constituent une base orthonormale.

En effet, deux vecteurs orthogonaux non nuls sont linéairement indépendants.

EXEMPLE. Considérons le plan $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto xx' + yy'.$$

La base canonique $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, où $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ et $\boldsymbol{j} = (0, 1)$, est orthonormale.

Dans tout plan euclidien E, il existe des bases orthonormales.

Soit en effet $\boldsymbol{a}$ un vecteur non nul de E. Nous savons qu'il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{c}$ orthogonal à $\boldsymbol{a}$, et que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont linéairement indépendants. Il est alors clair que les vecteurs $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ et $\dfrac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}$ constituent une base orthonormale de E.

Le calcul du produit scalaire de deux vecteurs d'un plan euclidien dans une base orthonormale $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ est exactement aussi simple que dans le cas de $\mathbf{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique. Plus précisément, si

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

alors

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = xx' + yy'. \tag{1}$$

En effet, puisque le produit scalaire est bilinéaire,

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = xx'\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_1 + xy'\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_2 + yx'\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_1 + yy'\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_2.$$

Puisque la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ est orthonormale, $\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_2 = 1$ et $\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_1 = 0$. Le second membre se réduit donc à $xx' + yy'$, ce qu'il fallait prouver.

En particulier, les composantes x et y d'un vecteur $\boldsymbol{a}$ dans une base orthonormale $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ ne sont autres que les produits scalaires $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{e}_2$.

Un vecteur $\boldsymbol{u}$ est unitaire si et seulement si ses composantes x et y dans une base orthonormale $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ vérifient la relation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Il existe alors un nombre réel θ, défini à $2k\pi$ près, tel que

$$x = \cos\theta \quad \text{et} \quad y = \sin\theta .$$

Soient B et B' deux bases orthonormales d'un plan euclidien et P la matrice de passage de B à B'. Alors le déterminant de P est égal soit à 1, *soit à* -1.

Soient en effet e'_1 et e'_2 les vecteurs de B'. Les relations $\|e'_1\|^2 = 1$, $\|e'_2\|^2 = 1$ et $e'_1 . e'_2 = 0$ montrent que ${}^tPP = I_2$. Or, il est immédiat que $\operatorname{Det} {}^tP = \operatorname{Det} P$. Ainsi, $(\operatorname{Det} P)^2 = \operatorname{Det} I_2 = 1$, ce qu'il fallait prouver.

Le calcul de la distance de deux points dans un repère orthonormal se déduit aussitôt de la formule (1). Soient A et B deux points de E, de coordonnées (x, y) et (x', y'). Alors

$$d(A, B) = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2} .$$

12.7 Orthogonalité dans les espaces euclidiens de dimension 3. L'étude du cas où la dimension de l'espace vectoriel E est égale à 3 est analogue à la précédente.

Soit $\boldsymbol{a}$ un vecteur non nul de E. L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à $\boldsymbol{a}$ est un plan, lequel ne contient pas $\boldsymbol{a}$.

En effet, cet ensemble est le noyau de la forme linéaire $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} . \boldsymbol{a}$. Cette forme linéaire est non nulle, puisque $\boldsymbol{a} . \boldsymbol{a} \neq 0$; son noyau est donc un plan, et $\boldsymbol{a}$ n'appartient pas à ce plan.

On dit qu'une base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de E est *orthonormale* si les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux :

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = \|\boldsymbol{e}_3\| = 1 , \\ &\boldsymbol{e}_2 . \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 . \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 . \boldsymbol{e}_2 = 0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Réciproquement, trois vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ satisfaisant aux conditions (2) sont linéairement indépendants. Ces trois vecteurs constituent donc une base orthonormale.

En effet, la relation

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$$

implique

$$(\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3) . \boldsymbol{e}_1 = 0 ,$$

et donc $\alpha_1 = 0$; de même, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

EXEMPLE. Considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto xx' + yy' + zz' .$$

La base canonique $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, où $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$, est orthonormale.

Dans tout espace vectoriel euclidien E de dimension 3, *il existe des bases orthonormales.*

Soit en effet $\boldsymbol{a}$ un vecteur non nul de E. Considérons le plan P orthogonal à $\boldsymbol{a}$. Muni de la restriction à $P \times P$ du produit scalaire sur E, P est un plan euclidien. Il existe donc une base orthonormale $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de P. Posons $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|$; les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$ satisfont aux relations (2). Ils constituent donc une base orthonormale de E.

Le calcul du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormale $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ est exactement aussi simple que dans le cas de $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Comme dans le cas d'un plan euclidien, on démontre que si

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2 + z'\boldsymbol{e}_3,$$

alors

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = xx' + yy' + zz'.$$

Toujours comme dans le cas d'un plan euclidien, on démontre que le déterminant de la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est égal soit à 1, soit à -1.

Enfin, la distance de deux points A et B, de coordonnées dans une base orthonormale (x, y, z) et (x', y', z') est

$$d(A, B) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ORIENTÉS

12.8 Orientations d'un espace vectoriel. De nombreuses questions de physique font appel à la notion intuitive d'orientation : rotation autour d'un axe, couple, tourbillons, etc. Il faut donc donner un sens mathématique à ce terme.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 ou 3 sur $\mathbf{R}$. La relation binaire définie par les couples (B, B') de bases de E tels que le déterminant de la matrice de passage P de B à B' soit strictement positif est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence s'appellent orientations de E: il existe exactement deux orientations de E.

La réflexivité résulte du fait que la matrice de passage de B à B est la matrice unité, dont le déterminant est égal à 1.

La symétrie résulte du fait que la matrice de passage de B' à B est l'inverse de la matrice de passage P de B à B', et de la relation

$$\operatorname{Det} P^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det} P}.$$

La transitivité résulte du fait que la matrice de passage de B à B'' est le produit PP' des matrices de passage P de B à B' et P' de B' à B'', et de la relation

$$\operatorname{Det} PP' = (\operatorname{Det} P).(\operatorname{Det} P'). \tag{1}$$

Soient enfin $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E et $B' = (-\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Le déterminant de la matrice de passage P de B à B' est -1, ce qui montre qu'il existe au moins deux orientations. Soient B'' une troisième base de E et P' la matrice de passage de B' à B''. La relation (1) montre que soit $\operatorname{Det} P' > 0$, soit $\operatorname{Det} PP' > 0$, et donc que l'orientation de B'' est soit celle de B', soit celle de B.

On appelle *espace vectoriel orienté* le couple constitué d'un espace vectoriel E de dimension 2 ou 3 sur $\mathbf{R}$ et d'une orientation de E. Une base de E est dite directe si son orientation est celle de E, rétrograde dans le cas contraire.

La donnée d'une base d'un espace vectoriel E définit une orientation de E. En particulier, l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est toujours supposé muni de l'orientation définie par sa base canonique. Il en est de même pour l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$.

12.9 Coordonnées polaires, coordonnées cylindriques. Considérons un plan euclidien orienté E, muni d'une base orthonormale directe $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Soit M un point de coordonnées x et y. Introduisons un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ colinéaire au vecteur $\boldsymbol{OM}$; notons ρ la mesure algébrique du vecteur $\boldsymbol{OM}$ suivant $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{OM} = \rho \boldsymbol{u}.$$

Soit enfin θ une mesure (en radians) de l'angle $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})$. Les nombres réels ρ et θ s'appellent *coordonnées polaires* de M (Fig. 12.1).

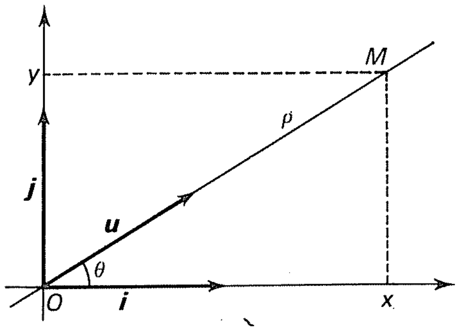


FIG. 12.1

Il est clair que

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

et que, si $\rho \neq 0$,

$$\cos\theta = x/\rho \qquad \sin\theta = y/\rho.$$

On remarque que si (ρ, θ) est un système de coordonnées polaires de M, il en est de même de $(\rho, \theta + 2k\pi)$, et aussi de $(-\rho, \theta + \pi + 2k'\pi)$, où k et k' appartiennent à $\boldsymbol{Z}$. (En effet, si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\boldsymbol{OM}$, il en est de même de $-\boldsymbol{u}$.) Si M est en O, $\rho = 0$ et θ est indéterminé.

Réciproquement, la donnée d'un couple (ρ, θ) de nombres réels définit un point M et un seul par les relations

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Soit maintenant E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, muni d'une base orthonormale directe $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. On peut représenter un point M par les coordonnées polaires ρ et θ de sa projection m sur le plan $(0, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j},)$ et par sa cote z (Fig. 12.2). Les nombres réels ρ, θ et z s'appellent *coordonnées cylindriques* de M.

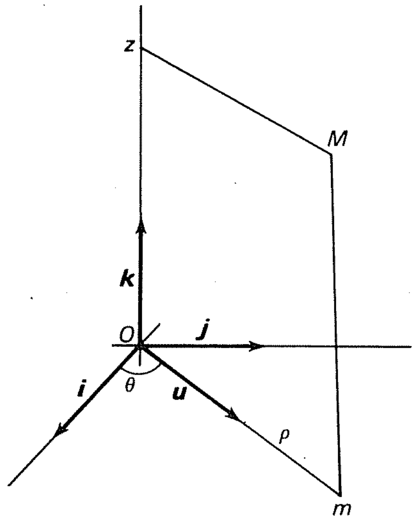


FIG. 12.2

Réciproquement, la donnée d'un triplet (ρ, θ, z) de nombres réels définit un point M et un seul par les relations $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ et par sa cote z.

12.10 Produit mixte. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le déterminant dans une base orthonormale directe de E est indépendant de la base considérée ; on l'appelle *produit mixte*, et on le note Det.

En effet, d'après le chapitre 8, pour tout couple (B, B') de bases de E,

$$\mathrm{Det}_B = (\mathrm{Det}\, P) . \mathrm{Det}_{B'},$$

où P désigne la matrice de passage de B à B'. Si B et B' sont orthonormales, $\mathrm{Det}\, P = \pm 1$; si B et B' définissent la même orientation, $\mathrm{Det}\, P > 0$. L'assertion en résulte.

Bien entendu, toutes les règles de calcul valables pour le déterminant de trois vecteurs restent valables pour les produits mixtes.

12.11 Produit vectoriel. La notion de produit mixte va nous permettre de définir de manière intrinsèque le produit vectoriel. Celui-ci est utilisé en mécanique dans l'étude du moment d'une force, en électricité dans la détermination de la force produite par un champ magnétique, etc.

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Pour tout couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de vecteurs de E, il existe un vecteur $\boldsymbol{v}$ de E et un seul tel que, pour tout vecteur $\boldsymbol{c}$ de E,

$$\mathrm{Det}\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} . \boldsymbol{v} .$$

Le vecteur $\boldsymbol{v}$ s'appelle *produit vectoriel* des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, et se note $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$.

En effet, l'application $f : c \mapsto \mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ est une forme linéaire sur E. D'autre part, pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E, l'application $g_v : \boldsymbol{c} \mapsto \boldsymbol{c}.\boldsymbol{v}$ est une forme linéaire sur E. Il est immédiat que l'application $g : \boldsymbol{v} \mapsto g_v$ de E dans son dual E^* est linéaire. Le noyau de g est constitué des vecteurs $\boldsymbol{v}$ de E tels que, pour tout vecteur $\boldsymbol{c}$ de E, $\boldsymbol{c}.\boldsymbol{v} = 0$. En particulier, $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = 0$, ce qui implique $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Ainsi, g est injective. Comme $\dim E^* = \dim E$, g est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il existe donc un vecteur $\boldsymbol{v}$ de E et un seul tel que $g_v = f$.

Soient B une base orthonormale directe de E, x, y, z les composantes de $\boldsymbol{a}$ et x', y', z' celles de $\boldsymbol{b}$ dans cette base. Alors les composantes de $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ sont

$$yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'.$$

Pour le vérifier, il suffit de prendre pour $\boldsymbol{c}$ les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$ de la base B, et de développer les déterminants $\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_1)$, $\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_2)$ et $\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_3)$ suivant la règle de Sarrus. Nous savons en effet que les composantes de $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ ne sont autres que les produits scalaires $\boldsymbol{e}_1.(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{e}_2.(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ et $\boldsymbol{e}_3.(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$.

Remarque. Le nom de produit mixte s'explique enfin : le produit mixte $\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ est le produit scalaire de $\boldsymbol{c}$ par le produit vectoriel $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$.

EXEMPLES

1. Soit $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Alors

$$\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

2. Considérons dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs $\boldsymbol{a} = (1, 2, -1)$ et $\boldsymbol{b} = (1, -1, 2)$. Alors $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ a pour composantes

$$\begin{aligned} &2 \times 2 - (-1)(-1) = 3 \\ &-1 \times 1 - 1 \times 2 = -3 \\ &1 \times (-1) - 2 \times 1 = -3. \end{aligned}$$

On montre en utilisant les composantes de $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ que l'application $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ est une application bilinéaire alternée de $E \times E$ dans E. Autrement dit, les applications $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ sont linéaires et, pour tout vecteur $\boldsymbol{a}$ de E, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Plus précisément, pour que $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, il faut et il suffit que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ soient colinéaires.

En effet, si les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont colinéaires, le vecteur $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ est nul, puisque, pour tout vecteur $\boldsymbol{c}$ de E, $\mathrm{Det}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Réciproquement, si la famille $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est libre, complétons-la en une base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ de E. Alors

$$\boldsymbol{c}.(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \mathrm{Det}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0,$$

donc $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.

Pour tout couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de vecteurs de E, le vecteur $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ est orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

En effet, le déterminant $\mathrm{Det}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ étant nul, le vecteur $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ est orthogonal à $\boldsymbol{a}$; de même, il est orthogonal à $\boldsymbol{b}$.

Pour tout couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de vecteurs linéairement indépendants, le triplet $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ est une base directe de E.

En effet, par définition de $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$,

$$\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\|^2.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ étant linéairement indépendants, le déterminant précédent est strictement positif, ce qui implique l'indépendance linéaire des vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Ces vecteurs constituent donc une base B' de E. Enfin, le déterminant de la matrice de passage de B à B', n'étant autre que $\operatorname{Det}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$, est strictement positif, ce qui montre que la base B' est directe.

Le produit vectoriel et le produit scalaire de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont liés par l'*identité de Lagrange :*

$$\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\|^2 + (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2.\|\boldsymbol{b}\|^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned}(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2+(xy'-yx')^2+(xx'+yy'+zz')^2 \\ = (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2).\end{aligned}$$

Supposons $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ non nuls, et notons θ l'unique élément de $[0, \pi]$ tel que

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta.$$

Alors

$$\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta.$$

Ainsi, la longueur du produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est égale au produit de leurs longueurs multiplié par le sinus de leur angle.

EXERCICES

Calculer les produits mixtes des vecteurs suivants de $\mathbf{R}^3$:

12.1 $a = (2, 5, 4)$ $b = (1, 2, 0)$ $c = (2, 4, 1)$.

12.2 $a = (1, 1, 1)$ $b = (1, -2, 0)$ $c = (-1, 2, 3)$.

12.3 $a = (1, 4, 8)$ $b = (-8, 4, -1)$ $c = (4, 7, -4)$.

12.4 $a = (2, 2, -1)$ $b = (2, -1, 2)$ $c = (-1, 2, 2)$.

12.5 $a = (1, 0, -1)$ $b = (0, 1, 2)$ $c = (0, 0, 1)$.

12.6 $a = (-8, 4, -1)$ $b = (1, 2, 1)$ $c = (4, 8, 4)$.

Calculer les produits scalaires et vectoriels des vecteurs suivants de $\mathbf{R}^3$, et vérifier dans chaque cas l'identité de Lagrange :

12.7 $a = (1, 0, 1)$ $b = (1, 1, 1)$ **12.8** $a = (1, 2, -3)$ $b = (1, -1, 1)$

12.9 $a = (1, 1, 2)$ $b = (3, 3, 6)$ **12.10** $a = (1, 1, -2)$ $b = (6, 0, 8)$

12.11 $a = (-2, 1, 3)$ $b = (2, 1, 3)$ **12.12** $a = (-8, 4, -1)$ $b = (2, 4, 1)$.

12.13 Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On pose $a = -2i + j$ et $b = 2i - j + k$. Pour tout vecteur $v = xi + yj + zk$, calculer $(a \wedge b) \wedge v$.

12.14 Montrer que les vecteurs $(j + k) \wedge i$, $(k + i) \wedge j$ et $(i + j) \wedge k$ sont linéairement dépendants.

Soient a, b et c des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Montrer que :

12.15 $a \wedge (b \wedge c) = (a.c)\, b - (a.b)\, c$.

12.16 $a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0$.

Soient a, b, c et d des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Montrer que :

12.17 $(a \wedge b).(c \wedge d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$.

12.18 $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \mathrm{Det}\,(a, b, d)\, c - \mathrm{Det}\,(a, b, c)\, d$.

12.19 Soient a, b et c des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Calculer : $\mathrm{Det}\,(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a)$ en fonction de $\mathrm{Det}\,(a, b, c)$.

12.20 Soient a un vecteur non nul de $\mathbf{R}^3$ et U l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ qui à tout vecteur v associe $a \wedge v$. Montrer que U est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$. Expliciter sa matrice associée dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de U.

12.21 Soient a et b des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'équation $a \wedge v = b$ admet des solutions si et seulement si $a.b = 0$. Résoudre alors cette équation. (On examinera séparément le cas où $a = 0$. Dans le cas général, on cherchera une solution particulière de l'équation avec second membre ; on lui ajoutera une solution quelconque de l'équation sans second membre $a \wedge v = 0$.)

SOLUTIONS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

1.1 $a)$ $A-(B\cup C) = A\cap(\overline{B\cup C}) = A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$
$= (A\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{C}) = (A-B)\cap(A-C).$

$b)$ $A-(B\cap C) = A\cap(\overline{B\cap C}) = A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})$
$= (A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C}) = (A-B)\cup(A-C).$

$c)$ $A\cap(B-C) = A\cap(B\cap\bar{C}) = (A\cap B)\cap(A\cap\bar{C})$
$= (A\cap B)\cap(A-C).$

1.2 a) S'il existe une partie X de E permettant d'écrire $A\cap X=B$, cela implique $B\subset A$, qui est donc une condition nécessaire pour que l'équation ait une solution.

Si cette condition est remplie, l'équation admet la solution évidente $X=B$ puisque $A\cap B=B$ résulte de l'inclusion $B\subset A$.

La condition trouvée est donc nécessaire et suffisante pour que l'équation ait des solutions.

b) Pour qu'une partie X de E soit solution, il faut et il suffit que X soit la réunion de B et d'une partie de E contenue dans le complémentaire de A ; autrement dit, il faut et il suffit que X soit de la forme $B\cup(P\cap\bar{A})$, où P appartient à $\mathfrak{P}(E)$.

1.3 Cet exercice se traite comme le précédent.

a) $A\subset B$.

b) $X = B\cap(P\cup\bar{A})$, où $P\in\mathfrak{P}(E)$.

Relations binaires

1.4 Il faut commencer par les propriétés les plus simples, pour éliminer un grand nombre de relations. La réflexivité impose dans le graphe les couples (a, a), (b, b), (c, c). Cela conduit à l'égalité, qui est une relation d'ordre.

On peut ensuite ajouter au graphe :

— un couple quelconque : d'où 6 relations possibles ;

— deux couples (a, b) et (a, c),
(b, a) et (b, c),
(c, a) et (c, b) ;

— trois couples, et ce sont alors des relations d'ordre total, au nombre de six, qu'on peut symboliser par

$$a\leqslant b\leqslant c,\quad b\leqslant a\leqslant c,\quad a\leqslant c\leqslant b,\quad b\leqslant c\leqslant a,\quad c\leqslant a\leqslant b \quad\text{et}\quad c\leqslant b\leqslant a.$$

1.5 Il y a au moins une classe d'équivalence et au plus trois.
Le cas où il y a trois classes d'équivalence est celui de la relation d'égalité.
Le cas où il y a deux classes d'équivalence est celui où deux et deux seulement des éléments a, b et c sont équivalents, ce qui correspond à trois relations d'équivalence possibles.
Le cas où il n'y a qu'une seule classe d'équivalence est celui où deux éléments quelconques sont égaux.
En résumé, il y a cinq relations d'équivalence.

1.6 *Réflexivité.* Puisque R est réflexive, pour tout élément x de E, $x\,R\,x$; donc $x\,R\,x$ et $x\,R\,x$, c'est-à-dire $x\,S\,x$.
La symétrie de S est évidente.

Transitivité. Supposons que $x\,S\,y$ et $y\,S\,z$, c'est-à-dire $x\,R\,y$ et $y\,R\,x$ et $y\,R\,z$ et $z\,R\,y$. Puisque R est transitive, ($x\,R\,y$ et $y\,R\,z$) implique $x\,R\,z$; ($z\,R\,y$ et $y\,R\,x$) implique $z\,R\,x$; donc $x\,S\,z$.

1.7 *Réflexivité.* Pour tout élément x de E, prenons $n=1$, $x_0=x_1=x$. Puisque R est réflexive, $x_0\,R\,x_1$, c'est-à-dire $x\,S\,x$.

Symétrie. Si $x\,S\,y$, on prend la suite $(x'_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ définie par $x'_p=x_{n-p}$. Alors $x'_0=y$, $x'_n=x$ et, puisque R est symétrique, $x'_p\,R\,x'_{p+1}$ (c'est-à-dire $x_{n-p}\,R\,x_{n-p-1}$).

Transitivité. Si $x\,S\,y$ et $y\,S\,z$, il existe deux suites $(x_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ et $(y_q)_{0\leqslant q\leqslant m}$ telles que $x_0=x$, $x_n=y_0=y$, $y_m=z$, $x_p\,R\,x_{p+1}$ si $p\in[0,n-1]$ et $y_q\,R\,y_{q+1}$ si $q\in[0,m-1]$. Il suffit de considérer la suite $(z_r)_{0\leqslant r\leqslant n+m}$ définie par $z_r=x_r$ si $r\leqslant n$, $z_r=y_{r-n}$ si $r>n$.
(Intuitivement, les points x et y sont reliés par une chaîne. La symétrie se démontre en renumérotant à l'envers les maillons de la chaîne. La transitivité se démontre en mettant deux chaînes bout à bout et en numérotant tous les maillons à la suite.)

Applications

1.8 Comme $f(n)$ a même parité que n, la relation

$$f(n)=f(n') \tag{1}$$

implique que n et n' sont simultanément pairs, ou impairs.
Lorsque n et n' sont pairs, la relation (1) se traduit par

$$n+2=n'+2\,,$$

et donc par $n=n'$.

Lorsque n et n' sont impairs, la relation (1) devient

$$n+4 = n'+4,$$

ou encore $n = n'$.

L'application f est donc injective.

Soit maintenant p un entier rationnel. Si p est pair, $p = f(p-2)$; si p est impair, $p = f(p-4)$. L'application f est donc surjective.

Si on remplace **Z** par **N**, l'injectivité se conserve; mais 0, 1 et 3 ne sont images d'aucun entier naturel. L'application f n'est plus surjective.

1.9 Il est immédiat que, pour toute application f de E dans F et pour toute partie A de E,

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Supposons que f soit injective. Considérons une partie A de E, et posons $B = f(A)$. Soit x un élément de $f^{-1}(B)$; alors $f(x)$ appartient à B. Par définition de B, il existe un élément x' de A tel que $f(x') = f(x)$. Puisque f est injective, $x = x'$, ce qui montre que $f^{-1}(B) \subset A$, et donc que

$$A = f^{-1}(f(A)).$$

Réciproquement, supposons cette relation vérifiée pour toute partie A de E. Soit x un élément de E; prenons $A = \{x\}$. Alors $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, ce qui montre que l'image réciproque de toute partie de F à un élément a au plus un élément. L'application f est donc injective.

Il est immédiat que, pour toute application f de E dans F et pour toute partie B de F,

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E).$$

Si f est surjective,

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

Réciproquement, supposons cette relation vérifiée pour toute partie B de F. Prenons $B = F$. Alors

$$f(f^{-1}(F)) = F,$$

ce qui implique que f est surjective.

1.10 a) Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$; alors $g[f(x)] = g[f(x')]$, c'est-à-dire $h(x) = h(x')$. Puisque h est injective, $x = x'$; donc f est injective.

Si, de plus, f est surjective, f admet une application réciproque f^{-1}. Alors $g = h \circ f^{-1}$; comme f^{-1} et h sont injectives, leur composée g l'est aussi.

b) Soit z un élément de G ; puisque h est surjective, il existe un élément x de E tel que $h(x) = z$, c'est-à-dire $g[f(x)] = z$. Ainsi, l'équation $g(y) = z$ a au moins une solution, à savoir $y = f(x)$. Donc g est surjective.

Si, de plus, g est injective, g admet une application réciproque g^{-1}. Alors $f = g^{-1} \circ h$; comme h et g^{-1} sont surjectives, leur composée f l'est aussi.

1.11 Supposons par exemple que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et que $f \circ h \circ g$ est surjective. D'après l'exercice précédent, puisque $h \circ (g \circ f)$ est injective, h est injective. De même, g est injective.

Puisque $(f \circ h) \circ g$ est surjective, g l'est aussi. Il en découle que g est bijective.

Par suite, $f \circ h = (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est surjective, et h l'est aussi. Il en découle que h est bijective.

Enfin, puisque $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ g$ sont injectives, f l'est aussi. Puisque $f \circ (h \circ g)$ et $h \circ g$ sont surjectives, f l'est aussi.

1.12 a) On voit que $f R f$ en prenant $n = 1$. Supposons que $f R g$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $f^n = g^n$. Puisque l'égalité est symétrique, $g^n = f^n$; donc $g R f$. Enfin, si $f R g$ et $g R h$, c'est-à-dire s'il existe des entiers naturels non nuls n et n' tels que $f^n = g^n$ et $g^{n'} = h^{n'}$, alors $f^{nn'} = g^{nn'} = h^{nn'}$; donc $f R h$.

b) On voit que $f S f$ en prenant $m = n = 1$. Si $f^m = g^n$, alors $g^n = f^m$; donc S est symétrique. Enfin, si $f^m = g^n$ et si $g^{m'} = h^{n'}$, alors $f^{mm'} = h^{nn'}$.

1.13 a) Il est clair que $f(P) \subset f(P \cup P')$ et $f(P') \subset f(P \cup P')$; donc $f(P) \cup f(P') \subset f(P \cup P')$. Inversement, soit y un élément de $f(P \cup P')$; il existe donc un élément x de $P \cup P'$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in P, f(x) \in f(P)$; si $x \in P', f(x) \in f(P')$. Dans tous les cas, $y \in f(P) \cup f(P')$.

b) Puisque $P \cap P' \subset P$, il est clair que $f(P \cap P') \subset f(P)$; de même $f(P \cap P') \subset f(P')$. Donc $f(P \cap P') \subset f(P) \cap f(P')$. Inversement, considérons un élément y de $f(P) \cap f(P')$. Il existe un élément x de P et un élément x' de P' tels que $f(x) = f(x') = y$. Si f est injective, $x = x'$, et $x \in P \cap P'$; donc $y = f(x) \in f(P \cap P')$.

Si f n'est pas injective, il existe deux éléments distincts x et x' tels que $f(x) = f(x')$. Posons $P = \{x\}$ et $P' = \{x'\}$; alors $f(P) = f(P') = \{f(x)\}$, tandis que $P \cap P' = \varnothing$ et donc que $f(P \cap P') = \varnothing$.

c) Le raisonnement est analogue.

1.14 La relation $x \in f^{-1}(Q \cup Q')$ signifie que $f(x) \in Q \cup Q'$, c'est-à-dire $f(x) \in Q$ ou $f(x) \in Q'$. Enfin, $f(x) \in Q$ équivaut à $x \in f^{-1}(Q)$, $f(x) \in Q'$ équivaut à $x \in f^{-1}(Q')$. En résumé, $x \in f^{-1}(Q \cup Q')$ équivaut à $x \in f^{-1}(Q)$ ou $x \in f^{-1}(Q')$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(Q')$.

Les autres égalités se démontrent de même.

CHAPITRE 2

2.1 $\mathcal{P}(E)$ comporte 8 éléments.

$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$

$\varnothing$ est élément neutre, et c'est le seul élément à admettre un symétrique.

2.2 Pour tout triplet (a, b, c),

$$(a * b) * c = a * c = a, \qquad a * (b * c) = a * b = a.$$

Donc la loi est associative. Il n'existe pas d'élément neutre e, puisque $a * e = a$ et $e * a = e$ et que l'on ne peut donc pas vérifier, pour tout nombre réel a,

$$a * e = e * a = a.$$

La loi n'est pas commutative, puisque $1 * 0 = 1$ et $0 * 1 = 0$.

2.3 La loi est commutative mais n'est pas associative car

$$(0 * 1) * 1 = 1 * 1 = 2, \qquad 0 * (1 * 1) = 0 * 2 = 4.$$

Il n'existe pas d'élément neutre e vérifiant, pour tout nombre réel a,

$$a^2 + e^2 = a.$$

2.4 La loi est commutative, non associative puisque

$$(4 * 9) * 1 = 6 * 1 = \sqrt{6}, \qquad 4 * (9 * 1) = 4 * 3 = 2\sqrt{3}.$$

On ne peut pas trouver d'élément neutre e vérifiant, pour tout nombre réel positif a,

$$a = \sqrt{ae}.$$

2.5 La loi n'est pas commutative puisque $0 * 1 \neq 1 * 0$. Elle n'est pas associative : $1 * (0 * 1) = 4$, $(1 * 0) * 1 = 10$.

Il n'existe pas d'élément neutre e tel que, pour tout élément a de $\mathbf{Z}$,

$$3a + e = 3e + a = a.$$

2.6 La loi est commutative mais n'est pas associative :

$$3 * (1 * 1) = 3 * 1 = 2, \qquad (3 * 1) * 1 = 2 * 1 = 3/2.$$

Il n'existe pas d'élément neutre e, puisque $(e+b)/2 = b$ n'a pas de solution.
Pour tout triplet (a, b, c) :

$$a * (b*c) = \frac{a + (b+c)/2}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4}$$

$$(a*b) * (a*c) = \frac{\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a+c}{2}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4}.$$

Donc $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$.

2.7 La loi n'est pas associative : $(1 * 2) * 1 \neq 1 * (2 * 1)$.
Elle n'est pas commutative : $1 * 2 \neq 2 * 1$

2.8 1° La loi est évidemment commutative ; elle est également associative, car

$$(a * b) * c = (a+b+ab) * c = a+b+ab+c+(a+b+ab)\, c$$
$$a * (b * c) = a * (b+c+bc) = a+b+c+bc+a(b+c+bc).$$

Donc $\quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
0 est élément neutre : $a * 0 = 0 * a = a$.

Tout réel a distinct de -1 admet un symétrique b tel que $a + b + ab = 0$, soit $b = -a/(1+a)$.

2° $a * (b+c) = a+b+c+ab+ac$
$(a * b) + (a * c) = a+b+ab+a+c+ac$
$a * (b+c) \neq (a * b) + (a * c)$

en général, donc la loi n'est pas distributive par rapport à l'addition; de même elle n'est pas distributive par rapport à la multiplication, puisque

$$a * (bc) = a+bc+abc$$
$$(a * b)\,(a * c) = (a+b+ab)\,(a+c+ac)$$

d'où $\quad a * (bc) \neq (a * b)\,(a * c)$ en général.

2.9 La loi $*$ n'est pas commutative, puisque $0 * 1 \neq 1 * 0$.
La loi $\circ$ est commutative, puisque $2ab = 2ba$.
La loi $*$ n'est pas associative :

$$(0 * 1) * 1 = 2 * 1 = 4, \qquad 0 * (1 * 1) = 0 * 3 = 6.$$

La loi $\circ$ est associative :

$$(a \circ b) \circ c = (2ab) \circ c = 4abc.$$
$$a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc) = 4abc\ .$$

Donc $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
La deuxième loi est distributive par rapport à la première car

$$a \circ (b * c) = a \circ (b+2c) = 2a(b+2c)$$
$$(a \circ b) * (a \circ c) = (2ab) * (2ac) = 2ab+4ac\,.$$

Donc

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)\,.$$

De même

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)\,.$$

2.10 La loi est commutative, mais non associative, car

$$(1 * 1) * 2 = 2 * 2 = 1 \quad \text{et} \quad 1 * (1 * 2) = 1 * 3/2 = 5/3\,.$$

Il n'existe pas d'élément neutre.

2.11 La loi est commutative; elle est également associative, car

$$(a*b) * c = x * c = y, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{et}$$

$$a * (b*c) = a * z = t, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Donc $(a*b) * c = a * (b*c) = \dfrac{abc}{ab+bc+ac}$.

2.12 La loi $*$ est commutative et associative, et 0 est élément neutre ; la loi $\circ$ est également commutative et associative, mais il n'existe pas d'élément neutre.

Pour vérifier la distributivité, on peut toujours se ramener au cas où $b \leqslant c$, puisque les lois $\circ$ et $*$ sont commutatives. Il suffit donc d'étudier les 3 cas : $a \leqslant b \leqslant c$, $b \leqslant a \leqslant c$ et $b \leqslant c \leqslant a$.

Dans le premier cas

$$a * (b \circ c) = a * b = b$$
$$(a * b) \circ (a * c) = b \circ c = b$$
$$a \circ (b * c) = a \circ c = a$$
$$(a \circ b) * (a \circ c) = a * a = a\,.$$

On procède de même pour les deux autres cas.

2.13 1⁰ Il existe $s \in E$ tel que $sa = as$, il suffit de prendre l'élément neutre; la relation est réflexive.

2⁰ Si $sb = as$, il existe s' tel que $bs' = s'a$.

s étant inversible, multiplions les deux termes de la relation $sb = as$ par s^{-1}, à gauche, et à droite :

$$s^{-1}sbs^{-1} = s^{-1}ass^{-1}\,;$$

et par associativité :

$$bs^{-1} = s^{-1}a\,.$$

La relation est symétrique.

3^0 Si $sb = as$, $tc = bt$.

Multiplions par s à gauche les 2 termes de la seconde relation :

$$stc = sbt = ast.$$

st étant inversible puisque s et t le sont, la relation est bien transitive.

2.14 Appliquons la propriété au produit ab : $ab(ab) = e$.
Multiplions à gauche par a : $aab(ab) = a$.
Or, $aa = e$, donc $b(ab) = a$.
Par associativité : $(ba)b = a$.
Multiplions à droite par b : $(ba)\,bb = ab$.
Or, $bb = e$, donc $ba = ab$.

2.15 En effet la relation s'écrit : $abab = aabb$.
Multiplions à droite par b^{-1} : $aba = aab$.
Puis à gauche par a^{-1} : $ba = ab$.

2.16 Pour tout x :

$$(x+x)^2 = x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x+x+x = x+x,$$

d'où $x+x = 0$.

D'autre part, quels que soient x et y,

$$(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+y,$$

d'où $xy+yx = 0$.

Or, on a vu plus haut que $xy+xy = 0$;
par suite $xy = yx$.

2.17 $\mathbf{R}^2$ muni des lois $*$ et $\circ$ n'est pas un corps, car il n'existe pas d'élément neutre pour la loi $\circ$. En effet, si (a, b) est tel que $a \neq 0$, on ne peut pas vérifier $(a, b) \circ (a', b') = (0, bb') = (a, b)$.

CHAPITRE 3

3.1 La propriété est vraie pour $n=1$:

$$1 = \frac{1\times 2}{2}.$$

Montrons qu'elle est héréditaire. De l'égalité

$$1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2,$$

on déduit

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = (n+1)\,(n/2+1) = (n+1)\,(n+2)/2,$$

ce qui achève la démonstration.

3.2 La propriété est vraie pour $n=1$:

$$1^2 = \frac{1\times 2\times 3}{6}.$$

Montrons qu'elle est héréditaire. De l'égalité

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n(n+1)\,(2n+1)/6,$$

on déduit

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right]$$
$$= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6},$$

ce qui achève la démonstration.

3.3 La propriété est vraie pour $n=0$, puisque $3^{2n+1}+2^{n+2}=7$. Montrons qu'elle est héréditaire, en la supposant vérifiée au rang n. Il est clair que :

$$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2} = 2(3^{2n+1}+2^{n+2})+7\times 3^{2n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7 ; il en est donc de même de $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$.

3.4 La propriété est vraie pour $n=1$. Montrons qu'elle est héréditaire. Supposons pour cela qu'il existe un entier k tel que

$$n^2(n^2-1) = 12k.$$

Alors

$$(n+1)^2\,[(n+1)^2-1] = (n^2+2n+1)\,(n^2+2n),$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$n^2(n^2-1)+4n^3+6n^2+2n\,;$$

il suffit donc de prouver que $4n^3+6n^2+2n$ est un multiple de 12. Or, cette propriété peut s'établir par récurrence. Elle est vraie pour $n=1$. Montrons qu'elle est héréditaire. Supposons pour cela qu'il existe un entier k tel que

$$4n^3+6n^2+2n = 12k.$$

Alors, $4(n+1)^3+6(n+1)^2+2(n+1)$ peut se mettre sous la forme

$$4n^3+6n^2+2n+12(n^2+2n+1) = 12(k+n^2+2n+1),$$

ce qui achève la démonstration.

3.5 Supposons le nombre $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rationnel. On aurait alors

$$x^2 = 2+2\sqrt{6}+3,$$

et $\sqrt{6}$ serait rationnel; soit $\sqrt{6}=p/q$ une représentation irréductible de ce rationnel.

De $p^2=6q^2$, on déduit que p^2, donc p, est pair.

Posant alors $2p'=p$, de $2p'^2=3q^2$, on déduit que q^2, donc q, est pair, ce que l'hypothèse de la représentation irréductible exclut.

Le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n'est donc pas rationnel.

3.6 Supposons le nombre $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ rationnel. On aurait alors

$$x-\sqrt{2} = \sqrt{3}+\sqrt{5},$$

d'où

$$x^2+2-2\sqrt{2}x = 3+5+2\sqrt{15}$$

et le nombre $y=\sqrt{15}+x\sqrt{2}$ serait rationnel. On aurait alors

$$y^2 = 15+2x^2+2x\sqrt{30}$$

et $\sqrt{30}$ serait rationnel. On réduit cette proposition à l'absurde comme pour $\sqrt{6}$ à l'exercice précédent.

3.7 L'image par f d'un nombre rationnel n'annulant pas $cx+d$ est un nombre rationnel.

Soit alors x' un irrationnel. L'égalité

$$f(x') = \frac{ax'+b}{cx'+d}$$

équivaut à $x'[cf(x')-a]=b-df(x')$.

Si $cf(x')-a\neq 0$, cette relation montrerait que x' est rationnel, ce qui est exclu.

Si $cf(x')-a=0$, on a aussi $b-df(x')=0$, ce qui entraîne $ad-bc=0$. Inversement, si $ad-bc=0$, f est constante sur son domaine de définition, et donc rationnelle.

3.8 1^0 Par définition de E, il existe deux réels α et β,

$$0 \leqslant \alpha < 1, \qquad 0 \leqslant \beta < 1,$$

tels que

$$x = E(x) + \alpha, \qquad y = E(y) + \beta.$$

Donc $x+y = E(x) + E(y) + \alpha + \beta$.

$E(x)+E(y)$ est donc un entier inférieur à $x+y$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier vérifiant cette propriété, on en déduit l'inégalité demandée

$$E(x+y) \geqslant E(x)+E(y).$$

2^0 En ajoutant au besoin un multiple entier positif de n à x, on peut se contenter de faire la démonstration pour le seul cas d'un réel x positif.

Alors, $E(x/n)$ est le nombre des multiples entiers de n compris entre 0 et x, tandis que $E(E(x)/n)$ est le nombre des multiples entiers de n compris entre 0 et $E(x)$: ces deux nombres sont donc égaux.

3.9 Le polynôme P : $x \mapsto (2+x)^n + (2-x)^n$ est une fonction paire. Son développement fait donc apparaître seulement

— des coefficients entiers,

— des puissances paires de x.

$P(\sqrt{2})$ est donc un entier.

3.10 On montre par récurrence que tout sous-groupe G de $\mathbf{R}$ contenant $1/7$ contient les nombres de la forme $n/7$, où $n \in \mathbf{N}$. Puisque G est un sous-groupe, G contient les opposés des éléments précédents, et donc l'ensemble G' des nombres réels de la forme $n/7$, où $n \in \mathbf{Z}$. Inversement, pour tout couple $\left(\frac{n}{7}, \frac{n'}{7}\right)$ d'éléments de G', $\frac{n}{7} - \frac{n'}{7} = \frac{n-n'}{7}$ appartient à G'. Ainsi, G' est un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Comme $\frac{1}{7} \in G'$, G' est le sous-groupe engendré par $1/7$.

3.11 Tout sous-anneau A de $\mathbf{R}$ contenant $1/7$ contient les éléments de la forme $n/7$, où $n \in \mathbf{Z}$. Puisque A est stable pour la multiplication, A contient l'ensemble A' des éléments de la forme $p/7^q$, où $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$. Inversement, pour tout couple $\frac{p}{7^q}, \frac{p'}{7^{q'}}$ d'éléments de A', $\frac{p}{7^q} - \frac{p'}{7^{q'}}$ et $\frac{p}{7^q}\frac{p'}{7^{q'}} = \frac{pp'}{7^{q+q'}}$ appartiennent à A'. Ainsi, A' est un sous-anneau de $\mathbf{R}$. Comme $1/7 \in A'$, A' est le sous-anneau engendré par $1/7$.

3.12 Tout sous-corps K de $\mathbf{R}$ contenant $1/7$ contient les inverses des éléments de la forme $n/7$, où $n \in \mathbf{N}^*$. En prenant pour n un multiple de 7, nous voyons que K contient les inverses des entiers non nuls, et donc tous les nombres rationnels. Inversement, $\mathbf{Q}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$ et $1/7 \in \mathbf{Q}$, ce qui montre que $\mathbf{Q}$ est le sous-corps engendré par $1/7$.

CHAPITRE 4

Forme cartésienne

4.1 $9+13j$.

4.2 $-4-3j$.

4.3 $\frac{25}{34}(-5+3j)$.

4.4 $3+4j$.

4.5 $-2-2j$.

4.6 $1+j$.

4.7 $\frac{1}{17}(19-9j)$.

4.8 2.

4.9 $-183+8j$.

4.10 $2+5j$.

4.11 $115+133j$.

4.12 $-211+295j$.

4.13 $176+210j$.

4.14 $-88+234j$.

4.15 $-217-456j$.

4.16 $161-240j$.

Racines carrées et cubiques

4.17 $\pm(4-j)$.

4.18 $\pm\sqrt[4]{2}\,e^{j\pi/8}$.

4.19 $\pm(2+j)$.

4.20 $\pm(5+4j)$.

4.21 $\pm(4-3j)$.

4.22 $\pm(4+3j)$.

4.23 $\pm 2e^{5j\pi/6}$.

4.24 $\pm(3+\sqrt{2}j)$.

4.25 $\pm(6-2j)$.

4.26 $\pm(1-j)$.

4.27 $2+j$, $\omega(2+j)$, $\omega^2(2+j)$.

4.28 $e^{2j\pi/9}$, $\omega e^{2j\pi/9}$, $\omega^2 e^{2j\pi/9}$.

Equations

4.29 $4+j$ et $1+4j$.

4.30 j et $j+1$.

4.31 -2 et $-2j$.

4.32 $3\pm 2j$.

4.33 j et $2-j$.

4.34 $\frac{1}{2}-j$ et $1+2j$.

4.35 $\sqrt{3}\pm j$.

4.36 $-3+5j$ et $-5+3j$.

4.37 $3+j$ et $2+j$.

4.38 $-j$ et $2+j$.

4.39 $\frac{j}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.

4.40 La relation $\bar{z} = z^2$ entraîne $z\bar{z} = z^3$, d'où $|z|^2 = |z|^3$, ce qui implique $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

— Si $|z| = 0$, alors $z = 0$ et ce nombre est solution de l'équation donnée.

— Si $|z| = 1$, alors $z^3 = 1$ d'où $z = 1$, $z = \omega$ ou $z = \omega^2$ et on vérifie immédiatement que ces trois nombres sont solutions de l'équation donnée.

4.41 La condition imposée s'écrit

$$(1+\mathrm{j})^7 + a(1+\mathrm{j})^5 + b = 0 .$$

Pour calculer $(1+\mathrm{j})^5$ et $(1+\mathrm{j})^7$, nous pouvons utiliser la formule du binôme, ou encore la formule de Moivre. Ecrivons à cet effet $1+\mathrm{j}$ sous la forme trigonométrique :

$$1+\mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

D'où

$$(1+\mathrm{j})^5 = 2^2\sqrt{2}\left(\cos 5\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin 5\frac{\pi}{4}\right) = -4(1+\mathrm{j}),$$

$$(1+\mathrm{j})^7 = 2^3\sqrt{2}\left(\cos 7\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin 7\frac{\pi}{4}\right) = 8(1-\mathrm{j}).$$

La condition devient

$$8(1-\mathrm{j}) - 4(1+\mathrm{j})\,a + b = 0 .$$

Puisque a et b sont réels, nous obtenons, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} 8 - 4a + b = 0 \\ -8 - 4a = 0 . \end{cases}$$

Finalement :

$$a = -2 \qquad \text{et} \qquad b = -16 .$$

4.42 L'image de toute racine de la première équation appartient au cercle de centre (0, 0) et de rayon 1 ; de même, l'image de toute racine de la deuxième équation appartient au cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1.

Ainsi, la partie réelle d'une racine commune à ces deux équations est nécessairement $-\frac{1}{2}$. Les racines communes éventuelles sont donc ω et ω^2.

Puisque ω et ω^2 sont complexes conjugués, la relation $\omega^n = 1$ équivaut à la relation $(\omega^2)^n = 1$; de même, la relation $(\omega+1)^p = 1$ équivaut à la relation $(\omega^2+1)^p = 1$.

Pour que $\omega^n = 1$, il faut et il suffit que n soit multiple de 3.

Pour que $(\omega+1)^p = 1$, il faut et il suffit que p soit pair et multiple de 3.

Les couples cherchés sont donc de la forme $(3\,n', 6\,p')$, où n' et p' sont des entiers naturels non nuls.

CHAPITRE 5

Sous-espaces vectoriels

5.1 Soit E' l'ensemble des éléments $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbf{R}^3$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. L'ensemble E' est non vide, car $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$ appartient à E'. Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ deux éléments de E', α et β deux nombres réels. Alors $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$, et

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3) = 0 .$$

Il en découle que E' est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

5.2 Même méthode, et même conclusion.

5.3 Le vecteur $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$ n'appartenant pas au sous-ensemble considéré, il ne s'agit pas d'un sous-espace vectoriel.

5.4 On démontre comme dans l'exercice 5.1 que l'ensemble E' des vecteurs tels que $x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$; il en est de même de l'ensemble E'' des vecteurs tels que $4x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Enfin, l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

5.5 Le raisonnement de l'exercice 5.4 se simplifie, car ici $E' = E''$, et $E' \cap E'' = E'$.

5.6 L'ensemble E' des vecteurs tels que $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel; il en est de même de l'ensemble E'' des vecteurs tels que $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Cependant, l'ensemble $E' \cup E''$ n'est pas un sous-espace vectoriel, car il n'est pas stable pour l'addition; par exemple, le vecteur $\boldsymbol{x}' = (1, 1, 0)$ appartient à E', et donc à $E' \cup E''$; de même, $\boldsymbol{x}'' = (1, 0, 1)$ appartient à $E' \cup E''$, mais $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' = (2, 0, 1)$, n'appartenant ni à E' ni à E'', n'appartient pas à leur réunion.

5.7 Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de H. Alors $\boldsymbol{x}$ appartient à $F + H$, et donc à $F + G$. Il existe donc un élément $\boldsymbol{y}$ de F et un élément $\boldsymbol{z}$ de G tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$. Puisque G est inclus dans H, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$ appartient à H; il en résulte que $\boldsymbol{y}$ appartient à $F \cap H = F \cap G$. Donc $\boldsymbol{y}$ appartient à G, ce qui montre que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ appartient à G. Par suite, $H \subset G$, et donc $H = G$.

5.8 Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G \neq E$. De même, si $G \subset F$, $F \cup G \neq E$. Si aucun des sous-espaces vectoriels F et G n'est contenu dans l'autre, il existe un élément $\boldsymbol{x}$ de F n'appartenant pas à G et un élément $\boldsymbol{y}$ de G n'appartenant pas à F. Alors $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ n'appartient pas à F, car dans le cas contraire $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}$ appartiendrait à F. De même, $\boldsymbol{z}$ n'appartient pas à G. Ainsi, $\boldsymbol{z} \notin F \cup G$, ce qui montre que $F \cup G \neq E$.

Applications linéaires

5.9 Soient $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y=(y_1, x_2, y_3, y_4)$ deux éléments de $\mathbf{R}^4$, α et β deux nombres réels. Alors

$$\begin{aligned} U(\alpha x+\beta y) &= (\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3, \alpha x_4+\beta y_4, 0) \\ &= \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)+\beta(y_1, y_2, y_3, y_4, 0) = \alpha x+\beta y\,. \end{aligned}$$

L'application U est donc linéaire. Son noyau est réduit au vecteur nul de $\mathbf{R}^4$ (ce qui implique que U est injective); son image est l'ensemble des vecteurs de la forme $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$.

5.10 Il est immédiat que U est linéaire. De plus, $\mathrm{Ker}(U)=\{0\}$ et $\mathrm{Im}(U)=E'$.

5.11 Soient $x=(x_1, x_2)$ et $y=(y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$, α et β deux nombres réels. Alors

$$\begin{aligned} U(\alpha x+\beta y) &= (4(\alpha x_1+\beta y_1)-3(\alpha x_2+\beta y_2), 5(\alpha x_1+\beta y_1)+4(\alpha x_2+\beta y_2)) \\ &= \alpha(4x_1-3x_2, 5x_1+4x_2)+\beta(4y_1-3y_2, 5y_1+4y_2)\,. \end{aligned}$$

Donc U est linéaire. De plus, $\mathrm{Ker}(U) = \{(0, 0)\}$ et $\mathrm{Im}(U) = \mathbf{R}^2$.

5.12 De même, U est linéaire. Le noyau et l'image de U sont égaux et constitués des vecteurs tels que $3x_1=2x_2$.

5.13 $\mathrm{Ker}(U) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(U) = \mathbf{R}^3$.

5.14 Le noyau de U est l'ensemble des vecteurs de la forme $(0, x_2, -x_2)$; l'image de U est l'ensemble des vecteurs tels que $x_1-x_2+x_3=0$.

5.15 $(V\circ U)(x_1, x_2) = (5x_1-2x_2, 7x_1-x_2)$
$(U\circ V)(x_1, x_2) = (2x_1+5x_2, 2x_2-x_1)$.

5.16 L'application réciproque est définie par

$$U^{-1}(x_1, x_2) = (x_1-x_2, x_2)\,.$$

5.17 $U^{-1}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{49}(5x_1+4x_2, -6x_1+5x_2)$.

5.18 Ecartons le cas trivial où $E=\{0\}$. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Il existe deux scalaires λ et μ tels que $U(x)=\lambda x$ et $U(y)=\mu y$.

Si x et y sont colinéaires, il est immédiat que $\lambda=\mu$.

Supposons que x et y ne sont pas colinéaires. Le vecteur $U(x+y)=\lambda x+\mu y$ étant colinéaire à $x+y$, les scalaires λ et μ sont égaux.

L'endomorphisme U est donc l'homothétie de rapport λ.

5.19 a) Soit y un élément de $\mathrm{Im}(U)$; il existe un élément x de E tel que $U(x)=y$. Comme $U^2=0$, $U(y)=U[U(x)]=U^2(x)=0$, ce qui montre que y appartient à $\mathrm{Ker}(U)$.

b) Il est clair que $(I_E - U)(I_E + U) = (I_E + U)(I_E - U) = I_E$. Donc $I_E + U$ admet pour application réciproque $I_E - U$; en particulier, $I_E + U$ est un automorphisme de E.

5.20 Si $x \in \operatorname{Ker}(U)$, alors $U(x) = 0$, $U^2(x) = U(0) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker}(U^2)$. Si $x \in \operatorname{Ker}(U^2)$, alors $y = U(x) \in \operatorname{Ker}(U)$. Or, $y \in \operatorname{Im}(U)$; par hypothèse, $\operatorname{Ker}(U) \cap \operatorname{Im}(U) = \{0\}$, et $y = 0$. Ainsi, $U(x) = 0$, et $x \in \operatorname{Ker}(U)$. En conclusion, $\operatorname{Ker}(U^2) = \operatorname{Ker}(U)$.

5.21 Si $x \in \operatorname{Ker}(U) \cap \operatorname{Im}(U)$, alors $U(x) = 0$ et il existe un élément y de E tel que $U(y) = x$. Donc $U^2(y) = 0$ et $y \in \operatorname{Ker}(U^2)$. Par hypothèse, $\operatorname{Ker}(U^2) = \operatorname{Ker}(U)$; donc $y \in \operatorname{Ker}(U)$ et $x = U(y) = 0$, ce qu'il fallait prouver.

5.22 Si $x \in \operatorname{Im}(U^2)$, il existe un élément y de E tel que $U^2(y) = x$; donc $x = U[U(y)]$, ce qui montre que $x \in \operatorname{Im}(U)$. Si $x \in \operatorname{Im}(U)$, il existe un élément y de E tel que $U(y) = x$. Puisque $E = \operatorname{Ker}(U) + \operatorname{Im}(U)$, il existe un élément u de $\operatorname{Ker}(U)$ et un élément v de $\operatorname{Im}(U)$ tels que $y = u + v$. Donc $x = U(y) = U(u) + U(v) = U(v)$. Puisque $v \in \operatorname{Im}(U)$, il existe un élément w de E tel que $U(w) = v$; ainsi, $x = U^2(w)$, ce qui montre que $x \in \operatorname{Im}(U^2)$.

5.23 Soit x un élément de E; alors $U(x) \in \operatorname{Im}(U) = \operatorname{Im}(U^2)$. Il existe un élément y de E tel que $U(x) = U^2(y)$. Donc $U[x - U(y)] = 0$ et $x - U(y) \in \operatorname{Ker}(U)$. Ainsi, le vecteur x est la somme d'un élément de $\operatorname{Im}(U)$ et d'un élément de $\operatorname{Ker}(U)$, ce qu'il fallait prouver.

5.24 a) Les applications U_1 et U_2 sont des endomorphismes, puisque

$$U_1 = \tfrac{1}{2}(I_E + U) \qquad \text{et} \qquad U_2 = \tfrac{1}{2}(I_E - U),$$

et que les endomorphismes de E constituent un espace vectoriel.

b) Soit x_1 un vecteur de E_1. Il existe un élément y_1 de E tel que

$$x_1 = \tfrac{1}{2}[y_1 + U(y_1)].$$

D'où

$$U(x_1) = U[\tfrac{1}{2}(y_1 + U(y_1))] = \tfrac{1}{2}[U(y_1) + U^2(y_1)] = \tfrac{1}{2}[U(y_1) + y_1],$$

c'est-à-dire $U(x_1) = x_1$. On montre de même que $U(x_2) = -x_2$.

La somme de E_1 et E_2 est E, puisque tout vecteur x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = \tfrac{1}{2}[x + U(x)] + \tfrac{1}{2}[x - U(x)]. \tag{1}$$

Soit enfin x un vecteur de $E_1 \cap E_2$; alors $U(x) = x$ et $U(x) = -x$, et donc $x = 0$.

c) La relation (1) s'écrit encore

$$x = U_1(x) + U_2(x).$$

L'application U_1 associe au vecteur x sa composante dans E_1; c'est donc le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2. De même pour U_2.

Bases

6.1 Non, car $2\boldsymbol{x}_1-3\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$.

6.2 Soit $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\alpha_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$ une relation linéaire entre ces vecteurs. Alors $\alpha_1+\alpha_3=0$, $\alpha_2+\alpha_3=0$, $-\alpha_1=0$. D'où $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Les vecteurs donnés sont donc linéairement indépendants; étant au nombre de 3, ils constituent une base de $\mathbf{R}^3$.

6.3 De même, $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0$, $2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0$, $3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0$. D'où $\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_3$, $\alpha_2+\alpha_3=2\alpha_1$, $\alpha_3+\alpha_1=2\alpha_2$, puis $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ et enfin $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. On conclut comme ci-dessus.

6.4 Oui.

6.5 Oui.

6.6 Soit $\alpha f+\beta g+\gamma h=0$ une relation linéaire entre ces fonctions. Autrement dit, pour tout élément x de $[0, 1]$,

$$\alpha f(x)+\beta g(x)+\gamma h(x) = 0 .$$

En remplaçant x par 0, on voit que $\alpha=0$. En simplifiant alors par $x^{1/2}$, on voit que $\beta=0$. Enfin, $\gamma=0$, et la famille est libre.

6.7 De même, en remplaçant successivement x par 0, 1/2 et 1, on obtient $\alpha+\beta/2=0$, $\alpha+\gamma/4=0$ et $\alpha+\beta/2+\gamma=0$. D'où $\gamma=0$, puis $\alpha=0$ et $\beta=0$.

6.8 Comme dans l'exercice 6.6, $\alpha=0$. Puisque la fonction $x\mapsto \sin x/x$ n'est pas constante, $\beta=\gamma=0$, et la famille est libre.

6.9 *Dimension de F.* La famille $(\boldsymbol{f}_1)$ est libre, car $\boldsymbol{f}_1\neq\boldsymbol{0}$. Si $\boldsymbol{f}_2$ était colinéaire à $\boldsymbol{f}_1$, alors $\boldsymbol{f}_2=\alpha\boldsymbol{f}_1$, d'où $1=\alpha$, $1=0$, $0=\alpha$ et $1=0$, ce qui est impossible. Donc $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)$ est libre. Supposons que $\boldsymbol{f}_3=\alpha\boldsymbol{f}_1+\beta\boldsymbol{f}_2$; alors $1=\alpha+\beta$, $2=\beta$, $0=\alpha$ et $1=\beta$, ce qui est impossible. Donc $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)$ est libre, et $\dim F=3$.

Dimension de G. Comme $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}_2+\boldsymbol{g}_3-\boldsymbol{g}_4$, $\dim G\leqslant 3$. Il est clair que $\boldsymbol{g}_2$ et $\boldsymbol{g}_4$ sont linéairement indépendants. Supposons que $\boldsymbol{g}_3=\alpha\boldsymbol{g}_2+\beta\boldsymbol{g}_4$; alors $1=0.\alpha+0.\beta$, ce qui est impossible. Donc la famille $(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3,\boldsymbol{g}_4)$ est libre, et $\dim G=3$.

Dimension de F+G. Puisque $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, $\dim(F+G)\leqslant 4$. Comme $F\subset F+G$, $\dim(F+G)\geqslant\dim F=3$. Adjoignons le vecteur $\boldsymbol{g}_2$ à $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)$. Si $\boldsymbol{g}_2=\alpha\boldsymbol{f}_1+\beta\boldsymbol{f}_2+\gamma\boldsymbol{f}_3$, alors $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\beta+2\gamma=0$, $\alpha=1$ et $\beta+\gamma=0$, ce qui est impossible. Donc la famille $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{g}_2)$ est libre, et $\dim(F+G)=4$. (Plus précisément, $F+G$ est égal à $\mathbf{R}^4$ tout entier.)

Dimension de $F\cap G$. Tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de $F\cap G$ peut s'écrire sous les formes

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{f}_1+\mu\boldsymbol{f}_2+\nu\boldsymbol{f}_3 = \alpha\boldsymbol{g}_2+\beta\boldsymbol{g}_3+\gamma\boldsymbol{g}_4 .$$

D'où $\lambda+\mu+\nu=\beta$, $\mu+2\nu=3\beta+\gamma$, $\lambda=\alpha-2\beta$ et $\mu+\nu=3\beta+\gamma$. Donc $\nu=0$; λ et μ restent arbitraires. Le sous-espace vectoriel $F\cap G$ est engendré par f_1 et f_2, et $\dim(F\cap G)=2$.

Ainsi, $\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=4+2=\dim F+\dim G=3+3$.

Applications linéaires

6.10 Appliquons la formule du rang :

$$\operatorname{rang}(U) = \dim K^4-\dim \operatorname{Ker}(U)\,.$$

Il est immédiat que le noyau de U est la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, 1, 1)$. Nous en déduisons que le rang de U est égal à 3.

6.11 Supposons que $\operatorname{Im}(U)=\operatorname{Ker}(U)$. Il en résulte aussitôt que $U^2=0$. Puisque $\dim\operatorname{Im}(U)=\dim\operatorname{Ker}(U)$, il résulte de la formule de la dimension que

$$\dim E = 2\operatorname{rang}(U)\,. \tag{1}$$

En particulier, la dimension de E est paire.

Réciproquement, la relation $U^2=0$ implique que

$$\operatorname{Im}(U) \subset \operatorname{Ker}(U)\,.$$

D'après la relation (1) et la formule de la dimension,

$$\dim\operatorname{Im}(U) = \dim\operatorname{Ker}(U)\,.$$

Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(U)$ et $\operatorname{Ker}(U)$ sont donc égaux.

6.12 Appliquons la formule du rang à U et à U^2 :

$$\operatorname{rang}(U) = \dim E-\dim\operatorname{Ker}(U)$$
$$\operatorname{rang}(U^2) = \dim E-\dim\operatorname{Ker}(U^2).$$

Donc $\operatorname{rang}(U)=\operatorname{rang}(U^2)$ si et seulement si $\dim\operatorname{Ker}(U)=\dim\operatorname{Ker}(U^2)$. D'autre part, $\operatorname{Ker}(U)\subset\operatorname{Ker}(U^2)$ (voir exercice 5.20) et $\operatorname{Im}(U^2)\subset\operatorname{Im}(U)$ (voir exercice 5.22). Enfin, deux sous-espaces vectoriels « emboîtés » sont égaux si et seulement s'ils ont la même dimension.

Récurrences linéaires

6.13 $u_n = 2^{n/2}\sin n\pi/4.$

6.14 $u_n = (2+\sqrt{5})\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (2-\sqrt{5})\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

6.15 $u_n = 3^n+2^n.$

6.16 $u_n = (1+n)\,3^n.$

6.17 Posons $v_n=1/u_n$; alors

$$v_n = \tfrac{1}{2}(v_{n-1}+v_{n-2})\,.$$

D'où

$$v_n = \lambda+\mu(-\tfrac{1}{2})^n.$$

Comme $v_0 = 1$ et $v_1 = 1/2$, on obtient $\lambda = 2/3$, $\mu = 1/3$ et enfin

$$u_n = \frac{3}{2+(-\frac{1}{2})^n} .$$

6.18 Cherchons des solutions de la forme $u_n = r^n$. Le nombre complexe r est racine de l'équation caractéristique

$$r^2 = 2r+k-1 .$$

Le discriminant réduit est égal à k.

Si $k > 0$, posons $l = \sqrt{k}$; nous obtenons la solution générale

$$u_n = \alpha(1+l)^n + \beta(1-l)^n .$$

Les conditions initiales se traduisent par

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha(1+l) + \beta(1-l) = 1+l^2 , \end{cases}$$

soit $\begin{array}{l} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = l ; \end{array}$

d'où $\alpha = \dfrac{1+l}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-l}{2}$.

Finalement $u_n = \dfrac{(1+l)^{n+1} + (1-l)^{n+1}}{2}$,

ou encore $u_n = 1+C_{n+1}^2 k + C_{n+1}^4 k^2 + \ldots + C_{n+1}^{2p} k^p + \ldots .$

Si $k < 0$, les calculs précédents restent valables à condition de poser cette fois $l = \mathrm{j}\sqrt{-k}$.

Si $k = 0$, la suite constante définie par $u_n = 1$ convient évidemment; c'est donc l'unique solution du problème.

6.19 Remarquons que $u_n + v_n = u_{n-1} + v_{n-1}$,

et donc que $u_n + v_n = u_0 + v_0$.

De même,

$$v_n - u_n = \tfrac{1}{3}[v_{n-1} - u_{n-1} + 2(u_{n-1} - v_{n-1})] = -\tfrac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1}) ,$$

d'où $v_n - u_n = (-\frac{1}{3})^n (v_0 - u_0)$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} u_n &= \tfrac{1}{2}(u_0+v_0) - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{3})^n (v_0-u_0) \\ v_n &= \tfrac{1}{2}(u_0+v_0) + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{3})^n (v_0-u_0) . \end{aligned}$$

Nous en déduisons aussitôt que les deux suites (u_n) et (v_n) ont même limite, à savoir

$$\tfrac{1}{2}(u_0+v_0) .$$

CHAPITRE 7

7.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7.5 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.6 $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

7.7 $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

7.8 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7.9 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

7.10 $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

7.11 $\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

7.12 $(11 \quad -11)$.

7.13 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.14 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.15 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.16 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.17 La matrice M^2 est égale à

$$\begin{pmatrix} -\gamma^2-\beta^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & -\alpha^2-\gamma^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & -\beta^2-\alpha^2 \end{pmatrix};$$

il s'ensuit que

$$M^3 = -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,M\,.$$

7.18 Puisque U n'est pas une homothétie, il existe un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E tel que $\boldsymbol{x}$ et $U(\boldsymbol{x})$ ne soient pas colinéaires. Alors $(\boldsymbol{x}, U(\boldsymbol{x}))$ est une base de E, et la matrice associée à U dans cette base est évidemment de la forme annoncée.

b) Lorsque U est une homothétie de rapport λ, $U-\lambda I_E=0$, et $(U-\lambda I_E)^2=0$, soit $U^2-2\lambda U+\lambda^2 I_E=0$.

Lorsque U n'est pas une homothétie, considérons la base définie ci-dessus. Posons $y=U(x)$; alors

$$U(y) = \alpha x+\beta y = \beta U(x)+\alpha I_E(x).$$

D'autre part,

$$U[U(y)] = \beta U(y)+\alpha U(x) = \beta U(y)+\alpha I_E[U(x)].$$

Les endomorphismes U^2 et $\beta U+\alpha I_E$, coïncidant sur les éléments d'une base, sont égaux, et

$$U^2-\beta U-\alpha I_E = 0,$$

relation de la forme demandée.

7.19 Nous obtenons aussitôt

$$M^2 = 5M-4I_3,$$

et, en multipliant les deux membres par M^{n-2},

$$M^n = 5M^{n-1}-4M^{n-2}.$$

Il vient, en ajoutant membre à membre les relations

$$\begin{array}{ll}
M^2 & = 5M-4I_3 \\
M^3 & = 5M^2-4M \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
M^{n-1} & = 5M^{n-2}-4M^{n-3} \\
M^n & = 5M^{n-1}-4M^{n-2} \\
\hline
M^n & = 4M^{n-1}+M-4I_3.
\end{array}$$

Les coefficients α_n et β_n satisfont donc aux relations de récurrence

$$\alpha_n = 4\alpha_{n-1}+1$$
$$\beta_n = 4(\beta_{n-1}-1).$$

Posons

$$u_n = \alpha_n+\frac{1}{3}, \qquad v_n = \beta_n-\frac{4}{3};$$

alors

$$u_n = 4u_{n-1} \qquad u_0 = \tfrac{1}{3}$$
$$v_n = 4v_{n-1} \qquad v_0 = -\tfrac{1}{3},$$

et

$$u_n = \frac{4^n}{3} \qquad v_n = -\frac{4^n}{3};$$

finalement,

$$\alpha_n = \frac{4^n-1}{3}, \qquad \beta_n = \frac{4-4^n}{3}.$$

Pour montrer que α_n est un entier, il suffit de remarquer que

$$\alpha_n = \frac{4-1}{3}(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})\,;$$

il en est de même pour $\beta_n = 1-\alpha_n$.

7.20 Vérifions d'abord que G est une partie stable de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, c'est-à-dire que, pour tout couple (a, b) de nombres réels différents de $\pi/2+k\pi$, il existe un nombre réel c différent de $\pi/2+k\pi$ tel que

$$M_a M_b = M_c.$$

Or,

$$M_a M_b = \frac{1}{\cos a\,\cos b}\begin{pmatrix} 1+\sin a\,\sin b & -\sin a-\sin b \\ -\sin a-\sin b & 1+\sin a\,\sin b \end{pmatrix}.$$

La relation $\cos a\,\cos b \neq 0$ implique $\sin a\,\sin b \neq -1$; donc

$$\cos c = \frac{\cos a\,\cos b}{1+\sin a\,\sin b},$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin a+\sin b}{\cos a\,\cos b},$$

et

$$\sin c = \cos c\,\operatorname{tg} c = \frac{\sin a+\sin b}{1+\sin a\,\sin b}.$$

Tout revient à vérifier que la condition de compatibilité

$$\sin^2 c+\cos^2 c = 1$$

est satisfaite; en effet,

$$\left(\frac{\cos a\,\cos b}{1+\sin a\,\sin b}\right)^2+\left(\frac{\sin a+\sin b}{1+\sin a\,\sin b}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cos^2 a\,\cos^2 b+\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\,\sin b}{1+2\sin a\,\sin b+\sin^2 a\,\sin^2 b} = 1.$$

La matrice unité appartient évidemment à G, et la matrice M_a admet pour inverse la matrice M_{-a}. Ainsi, G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$, visiblement commutatif.

7.21 a) Il suffit de montrer que $M^3=0$. Or,

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que la matrice M^3 est nulle.

b) Soient x et y deux nombres réels. Alors

$$f(x)\,f(y) = \left(I+xU+\frac{x^2}{2}\,U^2\right)\left(I+yU+\frac{y^2}{2}\,U^2\right).$$

Développons le second membre :

$$f(x)\,f(y) = I+(x+y)\,U+\frac{(x+y)^2}{2}\,U^2 = f(x+y),$$

puisque $U^3 = U^4 = 0$.

En prenant $y=-x$, nous voyons que $f(x)\ f(-x)=f(-x)\ f(x)=I$, ce qui montre que $f(x)$ admet $f(-x)$ pour application réciproque. Ainsi, $f(x)$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$.

7.22 a) Considérons un couple (M, N) d'éléments de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ et un couple (α, β) de nombres réels. Par définition de U,

$$U(\alpha M+\beta N) = P(\alpha M+\beta N)\,.$$

Comme

$$P(\alpha M+\beta N) = P(\alpha M)+P(\beta N) = \alpha PM+\beta PN=\alpha U(M)+\beta U(N)\,,$$

nous voyons que l'application U est linéaire.

b) Rappelons que la matrice associée à U dans la base B a pour j-ième colonne la famille des composants du transformé par U du j-ième vecteur de la base B. Ainsi,

$$U(M_1) = PM_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1+M_3\,.$$

La première colonne a donc pour éléments 1, 0, 1 et 0; de même pour les trois autres colonnes. Nous obtenons ainsi la matrice associée à U dans la base B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Le noyau de U est constitué des matrices M telles que $PM=0$. Ce sont les matrices $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ satisfaisant aux relations

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2+\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Une base du noyau de U est constituée des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de U est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2.

De même, l'image de U est constituée des matrices $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$ telles que $\beta_1 = \beta_3$ et que $\beta_2=\beta_4$. Une base de l'image de U est constituée des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de U est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2.

On vérifie que la somme des dimensions de $\mathrm{Im}(U)$ et de $\mathrm{Ker}(U)$ est égale à la dimension de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

CHAPITRE 8

Déterminants

8.1 0	**8.2** 0	**8.3** 0

(Dans les trois cas, la deuxième ligne est le double de la première.)

8.4 1	**8.5** 10	**8.6** 100
8.7 1	**8.8** 12	**8.9** 1
8.10 -18	**8.11** 2	**8.12** -36
8.13 1	**8.14** -18	**8.15** 0
8.16 30	**8.17** 14	**8.18** 155

Systèmes linéaires

8.19 $x = 3, \quad y = -1.$ **8.20** $x = -1, \quad y = 4.$

8.21 $x = \alpha, \quad y = \frac{4}{3}\alpha - 1.$ **8.22** $x = 0, \quad y = -1.$

8.23 $x = -1, \quad y = 4.$

8.24 Pas de solution.

8.25 Si $a^2+b^2 \neq 0$, $x = a, \quad y = b.$
Si $a^2+b^2 = 0$ et $a = 0$, tout couple (x, y) est solution,
et $a \neq 0$ (dans **C**), tout couple de la forme $(\alpha, b\alpha/a)$ est solution.

8.26 $x = 1, \quad y = 1.$ **8.27** $x = 2, \quad y = -2.$

8.28 Pas de solution.

8.29 $x = 110/34, \quad y = -35/34.$ **8.30** $x = -1, \quad y = -2.$

8.31 $x = 1/2, \quad y = -1, \quad z = 1/2.$ **8.32** $x = -2, \quad y = 1, \quad z = 2.$

8.33 $x = 0, \quad y = 0, \quad z = -1.$ **8.34** $x = 1/2, \quad y = 1, \quad z = -1.$

8.35 $x = a+2b-2c, \quad y = -a+3b, \quad z = -2b+c.$

8.36 $x = 3a+2b+6c, \quad y = a+b+2c, \quad z = 2a+2b+5c.$

8.37 $x = 2z, \quad y = 5z-1.$ **8.38** $y = 4x-1, \quad z = x+2.$

8.39 $x = 3 - \frac{5}{3}z, \quad y = \frac{2}{3}z.$ **8.40** $y = 1 - \frac{13}{2}x, \quad z = 1-19x.$

Inverses de matrices

8.41 $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **8.42** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. **8.43** $\begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.44 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **8.45** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **8.46** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8.47 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **8.48** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **8.49** $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

8.50 $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$. **8.51** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. **8.52** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3j & 1 \\ -2 & 2j & 2 \end{pmatrix}$.

8.53 a) La matrice C est inversible; d'où

$$B = AC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice C n'est pas inversible. Procédons par identification, en posant $B = (\alpha_{ij})$. Nous obtenons le système

$$\begin{cases} \alpha_{11} + 2\alpha_{12} - 5\alpha_{13} = -2 \\ 2\alpha_{11} - \alpha_{12} = 1 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{12} + 3\alpha_{12} = 1. \end{cases}$$

D'où $\alpha_{13} = \alpha_{11}$, puis $\alpha_{12} = 2\alpha_{11} - 1$. De même, $\alpha_{23} = \alpha_{21} - 2$, $\alpha_{22} = 2\alpha_{21} - 1$, $\alpha_{33} = \alpha_{31} - 2$, $\alpha_{32} = 2\alpha_{31} - 3$. En résumé, B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha - 1 & \alpha \\ \beta & 2\beta - 1 & \beta - 2 \\ \gamma & 2\gamma - 3 & \gamma - 2 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 9

Problèmes linéaires

9.1 L'espace vectoriel E est de dimension 3. Pour que trois éléments de E en constituent une base, il faut et il suffit que leur déterminant dans la base $B=(1, X, X^2)$ soit non nul. Or,

$$\mathrm{Det}_B(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

9.2 De même,

$$\mathrm{Det}_B(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

9.3 Pour changer, montrons que toute relation linéaire

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$$

est triviale. En remplaçant X par 0, nous voyons que $\alpha_1 = 0$. Il reste

$$\alpha_2 X(1-X) + \alpha_3 X^2 = 0.$$

En simplifiant par X, nous obtenons

$$\alpha_2(1-X) + \alpha_3 X = 0\,.$$

En remplaçant encore X par 0, nous obtenons $\alpha_2 = 0$ et, finalement, $\alpha_3 = 0$.

Les matrices de passage de B à B' et de B' à B sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.4 On vérifie facilement que U est linéaire. Comme d° $U(P) \leqslant 2$, U est un endomorphisme de E.

$$M_B(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad M_{B'}(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Divisions

9.5 $Q = 4X^3-2X^2+X+2$ $R = 3X$

9.6 $Q = X^2+1$ $R = -X^2-X-2$

9.7 $Q = -2X^3+X+3$ $R = 0$

9.8 $Q = 0$ $R = -X^6+3X^2-4X+1$

9.9 $Q = 2X^2+3X+11$ $R = 25X-5$

9.10 $Q = 4X^2-(3+4\mathrm{j})\,X-1+7\mathrm{j}$ $R = 8-6\mathrm{j}$

9.11 $Q = X^2+\dfrac{5}{2}X+\dfrac{25}{4}$ $R = \dfrac{35}{4}X-\dfrac{121}{4}$

9.12 $Q = X^2+2\mathrm{j}X-3-\mathrm{j}$ $R = (2-5\mathrm{j})\,X+4+\mathrm{j}$

9.13 $Q = 2X^2+X+1$ $R = X+1$

9.14 $Q = X^{15}+X^{12}+X^9+X^6+X^3+1$ $R = 0$

9.15 $Q = X^2-(3-\mathrm{j})\,X+2-2\mathrm{j}$ $R = 0$

9.16 $Q = 1-\dfrac{2}{3}X^3+\dfrac{2}{9}X^4$ $R = -2/9$

9.17 $Q = 3+X-2X^3$ $R = 0$

9.18 $Q = 2-5X+17X^2-57X^3+190X^4-632X^5$
$R = 2\,103-689X+190X^2-632X^3$

9.19 $Q = 1+X+X^2$ $R = 1-X^2-X^3$

9.20 $Q = 2+X-X^2$ $R = 1$

9.21 $Q = -1-X-4X^2-13X^3$ $R = 44+13X.$

Racines rationnelles

9.22 $-1/3$ **9.23** $-3/4$ **9.24** Néant

9.25 $1,\ -1/2,\ 1/2$ **9.26** $3/2$ **9.27** $2,\ -7/3.$

Décompositions en éléments simples

9.28 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{X-1}\right)$

9.29 $-\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}$

9.30 $-\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{1}{2(X-1)}+\frac{1}{2(X+1)}$

9.31 $\frac{1}{X-1}-\frac{16}{X+2}+\frac{27}{X+3}$

9.32 $\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}-\frac{\mathrm{j}}{X-\mathrm{j}}+\frac{\mathrm{j}}{X+\mathrm{j}}$

9.33 $1+\frac{1}{2(X-1)^3}+\frac{7}{4(X-1)^2}+\frac{17}{8(X-1)}-\frac{1}{8(X+1)}$

9.34 Les pôles sont $z_k \doteq \mathrm{e}^{2k\mathrm{j}\pi/n}$, où $k \in [0, n-1]$. Les résidus sont donnés par la formule

$$A_k = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k}{n}.$$

D'où la décomposition :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{2k\mathrm{j}\pi/n}}{X-\mathrm{e}^{2k\mathrm{j}\pi/n}}.$$

9.35 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{(2k+1)\mathrm{j}\pi/n}}{X-\mathrm{e}^{(2k+1)\mathrm{j}\pi/n}}.$

9.36 La fraction rationnelle se simplifie :

$$R = \frac{(X-1)(X^2-1)}{X(X^2+1)}.$$

D'où

$$R = 1+\frac{1}{X}-\frac{1-\mathrm{j}}{X-\mathrm{j}}-\frac{1+\mathrm{j}}{X+\mathrm{j}}.$$

9.37 $-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{8(X+1)}+\dfrac{1}{2(X-1)^3}-\dfrac{3}{4(X-1)^2}+\dfrac{7}{8(X-1)}$

9.38 $X+3+\dfrac{1}{2X}-\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{19}{2(X-2)}$

9.39 $X+6+\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{17}{X-2}+\dfrac{41}{X-3}$

9.40 $-\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{(X-1)^3}-\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{2}{X-1}$

9.41 $X^3-2X+\dfrac{2+\mathrm{j}}{2(X-\mathrm{j})}+\dfrac{2-\mathrm{j}}{2(X+\mathrm{j})}-\dfrac{3}{X-2}$

9.42 $\dfrac{3}{2(X-1)^3}+\dfrac{5}{2(X-1)^2}+\dfrac{11}{4(X-1)}-\dfrac{3(1+\mathrm{j})}{8(X-\mathrm{j})}-\dfrac{3(1-\mathrm{j})}{8(X+\mathrm{j})}$

9.43 $X^2+3+\dfrac{5}{4(X-2)}-\dfrac{5}{4(X+2)}+\dfrac{\mathrm{j}}{2(X-\mathrm{j})}-\dfrac{\mathrm{j}}{2(X+\mathrm{j})}$

9.44 $-\dfrac{1+2\mathrm{j}}{2(X-\mathrm{j})^2}+\dfrac{1}{2(X-\mathrm{j})}-\dfrac{1-2\mathrm{j}}{2(X+\mathrm{j})^2}+\dfrac{1}{2(X+\mathrm{j})}$

9.45 $\dfrac{1}{4(X-1)^3}+\dfrac{1}{8(X-1)^2}+\dfrac{3}{8(X-1)}-\dfrac{1}{4(X+1)^3}+\dfrac{1}{8(X+1)^2}-\dfrac{3}{8(X+1)}$

9.46 $\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{(X+2)^4}-\dfrac{4}{(X+2)^3}-\dfrac{1}{(X+2)^2}+\dfrac{2}{X+2}$

9.47 $\dfrac{1}{12(X-\omega)^2}+\dfrac{27-5\sqrt{3}\mathrm{j}}{72(X-\omega)}+\dfrac{1}{12(X+\omega)^2}-\dfrac{27-5\sqrt{3}\mathrm{j}}{72(X+\omega)}+\dfrac{1}{12(X-\omega^2)^2}+$

$$+\frac{27+5\sqrt{3}\mathrm{j}}{72(X-\omega^2)}+\frac{1}{12(X+\omega^2)^2}-\frac{27+5\sqrt{3}\mathrm{j}}{72(X+\omega^2)}.$$

9.48 $\dfrac{1+\omega}{3(X-\omega)^3}-\dfrac{2(2+\omega)}{9(X-\omega)^2}-\dfrac{2(1+2\,\omega)}{9(X-\omega)}+\dfrac{1+\omega^2}{3(X-\omega^2)^3}-\dfrac{2(2+\omega^2)}{9(X-\omega^2)^2}-\dfrac{2(1+2\,\omega^2)}{9(X-\omega^2)}.$

CHAPITRE 10

Diagonalisation des matrices carrées

10.1	$\delta = X^2-3X+2$	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 1$	$\boldsymbol{x}_1 = (1, 0)$	$\boldsymbol{x}_2 = (4, -1)$
10.2	$\delta = X^2-5X+6$	$\lambda_1 = 3$	$\lambda_2 = 2$	$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1)$	$\boldsymbol{x}_2 = (1, 2)$
10.3	$\delta = X^2-8X+12$	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 6$	$\boldsymbol{x}_1 = (-2, 1)$	$\boldsymbol{x}_2 = (2, 1)$
10.4	$\delta = X^2-X-6$	$\lambda_1 = -2$	$\lambda_2 = 3$	$\boldsymbol{x}_1 = (2\mathrm{j}, -1)$	$\boldsymbol{x}_2 = (1, -2\mathrm{j})$
10.5	$\delta = X^2-3X+2$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 2$	$\boldsymbol{x}_1 = (-3, 4)$	$\boldsymbol{x}_2 = (-2, 3)$
10.6	$\delta = X^2-15X+14$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 14$	$\boldsymbol{x}_1 = (-4, 1)$	$\boldsymbol{x}_2 = (1, -3)$

10.7 $\delta = X^3-3X^2+2X$ $\quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$
$\boldsymbol{x}_1 = (0, 1, -1) \quad \boldsymbol{x}_2 = (1, 0, 0) \quad \boldsymbol{x}_3 = (0, 1, 1)$

10.8 $\delta = X^3-21X^2+122X-168$ $\quad \lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 12$
$\boldsymbol{x}_1 = (3, -5, 4) \quad \boldsymbol{x}_2 = (4, 0, -3) \quad \boldsymbol{x}_3 = (3, 5, 4)$

10.9 $\delta = X^3-6X^2+8X$ $\quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4$
$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1) \quad \boldsymbol{x}_2 = (1, 2, 3) \quad \boldsymbol{x}_3 = (1, 4, 9)$

10.10 $\delta = X^3-3X^2+2X$ $\quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$
$\boldsymbol{x}_1 = (4, 63, -2) \quad \boldsymbol{x}_2 = (4, 0, -1) \quad \boldsymbol{x}_3 = (2, 1, 0)$

10.11 $\delta = X^3-12X^2+44X-48$ $\quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 6$
$\boldsymbol{x}_1 = (0, 1, 1) \quad \boldsymbol{x}_2 = (1, 0, 1) \quad \boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 0)$

10.12 $\delta = X^3-12X^2+45X-54$ $\quad \lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$
$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1) \quad \boldsymbol{x}_2 = (1, 0, -1) \quad \boldsymbol{x}_3 = (0, 1, -1).$

10.13 Pour qu'un élément non nul $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ de $\mathbf{C}^5$ soit un vecteur propre de M, il faut et il suffit qu'il existe un nombre complexe λ tel que

$$\begin{cases} \xi_5 = \lambda\xi_1 \\ \xi_3 = \lambda\xi_2 \\ \xi_2 = \lambda\xi_3 \\ \xi_1 = \lambda\xi_4 \\ \xi_4 = \lambda\xi_5 . \end{cases} \qquad \text{Ce système se scinde en les suivants :} \quad \begin{cases} \xi_5 = \lambda\xi_1 \\ \xi_1 = \lambda\xi_4 \\ \xi_4 = \lambda\xi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_3 = \lambda\xi_2 \\ \xi_2 = \lambda\xi_3 . \end{cases}$$

Le premier système conduit à $\xi_1 = \lambda^3 \xi_1$, le second à $\xi_2 = \lambda^2 \xi_2$.

Si λ est différent de 1, -1, ω et ω^2, les deux systèmes sont cramériens, ce qui contredit la non-nullité de $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$.

Si $\lambda = -1$, alors $\xi_1 = \xi_4 = \xi_5 = 0$ et $\xi_2 = -\xi_3$.
Si $\lambda = 1$, alors $\xi_1 = \xi_4 = \xi_5$ et $\xi_2 = \xi_3$.
Si $\lambda = \omega$, alors $\xi_5 = \omega\xi_1$, $\xi_4 = \omega^2 \xi_1$ et $\xi_2 = \xi_3 = 0$.
Si $\lambda = \omega^2$, alors $\xi_5 = \omega^2 \xi_1$, $\xi_4 = \omega\xi_1$ et $\xi_2 = \xi_3 = 0$.

Une matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{C}^5$ à une base de vecteurs propres est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1 & 0 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de M sont donc -1, 1, ω et ω^2, 1 étant valeur propre double (c'est-à-dire une racine double du polynôme caractéristique).

10.14 Les conditions données s'écrivent

$$1+\alpha+\beta = 1+\alpha'+\beta' = 1+\alpha''+\beta''$$
$$1-\beta = -(1-\beta'') \qquad 1-\beta' = 0$$
$$1-\alpha+\beta = -(1-\alpha'+\beta') = 1-\alpha''+\beta''.$$

On en déduit facilement que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.15 Le polynôme caractéristique de M est

$$\delta = X^3 - X^2 - X + 1 = (X+1)(X-1)^2.$$

Donc -1 est valeur propre simple, et 1 valeur propre double.

Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable est que la dimension du sous-espace propre E_1 associé à 1 soit égale à 2. Les éléments (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de ce sous-espace propre sont les solutions du système

$$\begin{cases} -3\ \ \xi_1 + \alpha\sqrt{2}\,\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ -\sqrt{2}\,\xi_1 \qquad\qquad + \sqrt{2}\,\xi_3 = 0 \\ \qquad \xi_1 + \alpha\sqrt{2}\,\xi_2 - \ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Pour que ces solutions constituent un plan, il faut et il suffit que $\alpha = 0$. Le sous-espace propre E_1 est alors le plan d'équation $\xi_1 = \xi_3$, dont une base est constituée des vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite engendrée par le vecteur $(3, \sqrt{2}, -1)$.

12.1 -1 **12.2** -9 **12.3** -729

12.4 -27 **12.5** 1 **12.6** $0.$

	$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$	$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})^2$	$\Vert \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \Vert^2$	$\Vert \boldsymbol{a} \Vert^2 \Vert \boldsymbol{b} \Vert^2$
12.7	2	$(-1, 0, 1)$	4	2	6
12.8	-4	$(-1, -4, -3)$	16	26	42
12.9	18	$(0, 0, 0)$	324	0	324
12.10	-10	$(8, -20, -6)$	100	500	600
12.11	6	$(0, -12, -4)$	36	160	196
12.12	-1	$(8, 6, -40)$	1	1 700	1 701

On vérifie que la dernière colonne est la somme des deux autres.

12.13 Le vecteur $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ est égal à $\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$. Par suite,

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{v} = 2z\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (y - 2x)\boldsymbol{k} .$$

12.14 Les vecteurs considérés sont $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; leur somme est nulle.

12.15 Posons $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{b} = (x', y', z')$ et $\boldsymbol{c} = (x'', y'', z'')$. Alors

$$bc = (y' z'' - z' y'', z' x'' - x' z'', x' y'' - y' x'') .$$

La première composante de $a(bc)$ est

$$\begin{aligned} y(x' y'' - y' x'') - z(z' x'' - x' z'') &= x'(yy'' + z' z'') - x''(yy' + zz') \\ &= x'(xx'' + yy'' + zz'') - x''(xx' + yy' + zz') \\ &= (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\, x - (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\, x'' . \end{aligned}$$

De même pour les deux autres composantes.

12.16 On applique trois fois la formule précédente et on ajoute membre à membre.

12.17 $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}).(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = \operatorname{Det}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d})).\boldsymbol{a}$.
D'après l'exercice 12.15,

$$\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{d})\, \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{d} .$$

Finalement,

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}).(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{d})\, (\boldsymbol{c}.\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{d}.\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{d})\, (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}) .$$

12.18 D'après l'exercice 12.15,

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = ((a \wedge b).d)\, c - ((a \wedge b).c)\, d\,.$$

Par définition du produit vectoriel,

$$(a \wedge b).d = \operatorname{Det}(a, b, d) \qquad (a \wedge b).c = \operatorname{Det}(a, b, c)\,.$$

12.19 $\operatorname{Det}(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) = ((a \wedge b) \wedge (b \wedge c)).(c \wedge a)$.
D'après l'exercice 12.18,

$$(a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = \operatorname{Det}(a, b, c)\,(b - c)\,.$$

Or, $c \wedge (c \wedge a) = 0$ et $b.(c \wedge a) = \operatorname{Det}(c, a, b) = \operatorname{Det}(a, b, c)$. Le nombre cherché est donc $\operatorname{Det}(a, b, c)^2$.

12.20 La linéarité de U résulte de la bilinéarité du produit vectoriel. Posons $a = (p, q, r)$; la matrice associée à U est

$$\begin{pmatrix} 0 & q & -r \\ -q & 0 & p \\ r & -p & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $a \wedge v$, étant orthogonal à v, ne lui est colinéaire que s'il est nul, ce qui équivaut à dire que v est colinéaire à a. Autrement dit, U admet une seule valeur propre, à savoir 0, et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par le vecteur a.

12.21 Le vecteur $a \wedge v$ étant orthogonal à a, le produit scalaire $a.b$ doit être nul. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation est impossible ; si $a = b = 0$, le vecteur v est indéterminé. Supposons $a \neq 0$; la relation $a \wedge v = b$ implique $a \wedge (a \wedge v) = a \wedge b$, soit, puisque $a.b = 0$,

$$(a.v)\, a - (a.a)\, v = a \wedge b\,.$$

Le vecteur $-\dfrac{1}{\| a \|^2} a \wedge b$ est une solution évidente de cette dernière équation ; on vérifie aisément que c'est une solution de l'équation initiale. Enfin, le noyau de l'endomorphisme $v \mapsto a \wedge v$ étant la droite engendrée par a, les solutions de l'équation $a \wedge v = b$ sont les vecteurs de la forme $\lambda a - \dfrac{1}{\| a \|^2} a \wedge b$.

FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE

Formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = j\,\frac{e^{-jx}-e^{jx}}{e^{-jx}+e^{jx}} = j\,\frac{e^{-2jx}-1}{e^{-2jx}+1} = j\,\frac{1-e^{2jx}}{1+e^{2jx}} \qquad \text{si } x \not\equiv \frac{\pi}{2} \text{ (mod. } \pi)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{si } x \not\equiv 0 \text{ (mod. } \pi).$$

Formules d'addition. Pour tout couple (a, b) de nombres réels,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, $\quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad a,\ b,\ a+b \not\equiv \frac{\pi}{2} \text{ (mod. } \pi)$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad a,\ b,\ a-b \not\equiv \frac{\pi}{2} \text{ (mod. } \pi)$$

Transformation d'un produit en somme

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

Transformation d'une somme en produit. Pour tout couple (p, q) de nombres réels,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \qquad \text{si } p, q \not\equiv \frac{\pi}{2} \text{ (mod. } \pi)$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} \qquad \text{si } p, q \not\equiv \frac{\pi}{2} \text{ (mod. } \pi).$$

Duplication. Pour tout nombre réel a,

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

Pour tout nombre réel a,

$$\cos 2a = \frac{1-\mathrm{tg}^2 a}{1+\mathrm{tg}^2 a} \qquad \text{si } a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ (\mathrm{mod.}\, \pi)$$

$$\sin 2a = \frac{2\,\mathrm{tg}\, a}{1+\mathrm{tg}^2 a} \qquad \text{si } a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ (\mathrm{mod.}\, \pi)$$

$$\mathrm{tg}\, 2a = \frac{2\,\mathrm{tg}\, a}{1-\mathrm{tg}^2 a} \qquad \text{si } a,\ 2a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ (\mathrm{mod.}\, \pi)$$

$$e^{2ja} = \frac{1+j\,\mathrm{tg}\, a}{1-j\,\mathrm{tg}\, a} \qquad \text{si } a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ (\mathrm{mod.}\, \pi)$$

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = \frac{1-\cos 2a}{\sin 2a} \qquad \text{si } a \not\equiv 0 \left(\mathrm{mod.}\, \frac{\pi}{2}\right)$$

Triplication

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

$$\mathrm{tg}\, 3a = \frac{3\,\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}^3 a}{1-3\,\mathrm{tg}^2 a} \qquad \text{si } 3a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ (\mathrm{mod.}\, \pi).$$

Pour tout entier rationnel n,

$(\cos a + j \sin a)^n = \cos na + j \sin na$, $(\cos a - j \sin a)^n = \cos na - j \sin na$.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\cos na = \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + \ldots + (-1)^p C_n^{2p} \cos^{n-2p} a \sin^{2p} a + \ldots$$

$$\sin na = C_n^1 \cos^{n-1} a \sin a - C_n^3 \cos^{n-3} a \sin^3 a + \ldots +$$
$$+ (-1)^p C_n^{2p+1} \cos^{n-2p-1} a \sin^{2p+1} a + \ldots$$

$$\mathrm{tg}\, na = \frac{C_n^1\, \mathrm{tg}\, a - C_n^3\, \mathrm{tg}^3 a + \ldots + (-1)^p C_n^{2p+1}\, \mathrm{tg}^{2p+1} a + \ldots}{1 - C_n^2\, \mathrm{tg}^2 a + \ldots + (-1)^p C_n^{2p}\, \mathrm{tg}^{2p} a + \ldots}$$

si a, $na \not\equiv \pi/2$ (mod. π).

Formules de linéarisation. Pour tout entier naturel non nul p,

$$\cos^{2p} a = \frac{1}{2^{2p-1}} \left(\sum_{q=0}^{p-1} C_{2p}^{q} \cos[(2p-2q)a] + \frac{1}{2} C_{2p}^{p} \right)$$

$$\sin^{2p} a = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \left(\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q C_{2p}^{q} \cos[(2p-2q)a] + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^{p} \right).$$

Pour tout entier naturel p,

$$\cos^{2p+1} a = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} C_{2p+1}^{q} \cos[(2p+1-2q)a]$$

$$\sin^{2p+1} a = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_{2p+1}^{q} \sin[(2p+1-2q)a].$$

INDEX TERMINOLOGIQUE

Imprimé en France. — JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS

N° 16615. Dépôt légal : Novembre 1986
Dépôt légal de la précédente édition : 4e trimestre 1973

J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux*, est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

- EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
- AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
- Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides*, en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
- Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATHIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et B. Sahler "Probabilités et statistiques".

9 782040 052157

ISBN 2-04-005215-1